RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 giugno 1922.

V. VOLTERRA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

Chimica. — *Ricerche sopra gli azossifenoli.* Nota del Socio A. ANGELI, DINO BIGIAVI e GINO CARRARA.

Come è stato dimostrato in precedenti lavori, anche gli azossifenoli, al pari degli azossiderivati in genere, possono presentarsi nelle due forme isomere (1): nel caso particolare del para-azossifenolo si hanno i due termini:

$$C_6H_5 . \underset{\underset{O}{\|}}{N}=N . C_6H_4 . OH\,(4) \qquad \text{p. f. } 156°$$

$$C_6H_5 . N=\underset{\underset{O}{\|}}{N} . C_6H_4 . OH\,(4) \qquad \text{p. f. } 118°,$$

il primo dei quali è identico a quello che E. Bamberger ottenne in piccolissima quantità per azione degli alcali sopra il nitrosobenzolo. Senza dubbio sono da considerarsi come isomeri e non già stereoisomeri, come dapprima supponeva Bamberger (2), anche i due derivati ortosostituiti:

$$C_6H_5 . N(:O)=N . C_6H_4 . OH\,(2) \qquad \text{p. f. } 76°$$
$$C_6H_5 . N=N(:O) . C_6H_4 . OH\,(2) \qquad \text{p. f. } 108°$$

Nel caso degli azossiderivati

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4R ,$$

(1) R. A. L., *23* (1914), 1° sem., pag. 557; R. A. L., *23* (1914), 2° sem., pag. 30.
(2) Berliner Berichte, *35* (1902), pag. 1614.

dove R rappresenta gruppi alcoolici od aromatici, alogeni, residuo nitrico, solfonico, carbossilico ecc., in generale riesce molto facile lo stabilire in modo rigoroso a quale dei due atomi di azoto è fissato l'atomo di ossigeno, studiando principalmente il loro comportamento rispetto al bromo oppure all'acido nitrico: a parità di condizioni, infatti, reagisce con questi reattivi, per dare prodotti di sostituzione, solamente l'anello aromatico congiunto all'azoto trivalente,

$$R . C_6H_4 . N=$$

Ma nel caso degli azossifenoli e dei loro eteri questo metodo non si può applicare, giacchè, al pari dell'atomo di azoto trivalente, anche l'atomo di ossigeno, sotto forma di ossidrile ovvero di ossietile:

$$R . C_6H_4 . N= \qquad\qquad R . C_6H_4 . O—,$$

può favorire per conto suo l'entrata dell'alogeno ovvero dei gruppi nitrici nell'anello aromatico al quale l'O — è immediatamente congiunto. Perciò, contrariamente a quanto si verifica per le altre coppie di azossicomposti isomeri, tutti e due i p-azossifenoli reagiscono con bromo; e lo stesso fanno anche i loro eteri etilici, che entrambi forniscono monobromoderivati, i quali per caso fondono quasi alla stessa temperatura. Solamente studiando i prodotti di demolizione dei derivati così ottenuti, è possibile anche in questi casi risalire alla struttura del composto di partenza, come p. es. venne fatto per il p-azossifenolo p. f. 156°:

$$C_6H_5 . N(:O)=N . C_6H_4 . OH$$

$$\downarrow$$

$$C_6H_5 . N(:O)=N . C_6H_3Br . OH$$

$$\downarrow$$

$$C_6H_5 . N(:O)=N . C_6H_2Br_2 . OH$$

$$\downarrow$$

$$C_6H_5 . NH_2 + H_2N . C_6H_2Br_2 (OH) ;$$

abbiamo potuto verificare in tal modo che anche il tribromo-p-azossifenolo per riduzione fornisce lo stesso bibromoparaamminofenolo (assieme con p-bromoanilina) e perciò la sua struttura è la seguente:

$$BrC_6H_4 . N(:O)=N . C_6H_2Br_2 (OH).$$

Ma se per questo mezzo è sempre possibile fissare in modo sicuro la struttura degli azossifenoli, si deve anche riconoscere che il metodo è lungo,

laborioso, e richiede nella maggior parte dei casi quantità di prodotti piuttosto rilevanti. Questa difficoltà viene accresciuta dal fatto che spesso riesce oltremodo difficile separare un isomero dall'altro: infatti, se torna agevole isolare per cristallizzazione dai solventi l'isomero meno solubile, alle volte è quasi impossibile ottenere allo stato di purezza l'isomero più solubile ed a più basso punto di fusione, che simultaneamente si forma; esso si separa sempre con quantità variabili del primo e, ripetendo le cristallizzazioni frazionate, non è raro il caso di pervenire nuovamente alla forma che fonde più alta, mentre l'isomero che si tenta di isolare finisce per rimanere in gran parte sciolto nelle acque madri. In alcuni casi ci fu possibile superare questa difficoltà trasformando gli azossifenoli nei corrispondenti derivati benzoilici, che in generale cristallizzano bene e sono meno solubili dei prodotti di partenza. Infatti solamente in questo modo fu possibile isolare allo stato di purezza il p-azossifenolo p. f. 118°. Anche questo metodo però è molto laborioso e richiede del pari che si possa disporre di una certa quantità di prodotti.

Per tutte queste ragioni, allo scopo di poter isolare oppure di meglio caratterizzare entrambi gli isomeri in modo più sollecito, ed anche operando su piccole quantità di sostanza, abbiamo giudicato opportuno di intraprendere una ricerca sistematica sopra il comportamento, rispetto ad altri reattivi, di alcuni azossifenoli di costituzione ben definita.

A tale scopo, ancora lo scorso anno [1], venne studiata l'azione del permanganato sopra la soluzione alcalina dei due p-azossifenoli: nel mentre entrambi, per azione prolungata di questo reattivo, finiscono col trasformarsi in gran parte nel sale di isodiazobenzolo:

$$C_6H_5 . (N_2O) . C_6H_4(OH) \longrightarrow C_6H_5 . N = N(OH) ,$$

si è potuto osservare che essi differiscono in modo notevole rispetto alla resistenza che presentano all'ossidante. Dei due isomeri infatti:

$$C_6H_5 . N(:O) = N . C_6H_4(OH) \qquad C_6H_5 . N = N(:O) . C_6H_4(OH) ,$$

solamente il primo (p. f. 156°) scolora immediatamente il permanganato e nello stesso tempo si avverte l'odore caratteristico del nitrosobenzolo e successivamente quello di nitrobenzolo. Ad ossidazione finita, nel liquido, di color giallo dorato, si riscontra isodiazobenzolo: il color giallo molto probabilmente è dovuto ad una reazione secondaria che procede nel seguente modo:

$$C_6H_5 . N(:O) = N . C_6H_4(OH) \qquad + O_2 = C_6H_5 . NO + NO_2 . C_6H_4(OH).$$

[1] G., *51* (1921), I, pag. 35.

Così si spiega la formazione di nitrosobenzolo, mentre la colorazione del liquido sarebbe dovuta a piccole quantità di p-nitrofenolo.

Il secondo isomero invece (p. f. 118°) presenta una grande resistenza all'azione del permanganato; l'ossidazione non è completa se non dopo alcune ore. Questo diverso comportamento presenta quindi un mezzo molto facile per avere allo stato puro l'isomero che fonde a 118°, la separazione del quale, come si è detto, si era potuta realizzare prima solamente per mezzo dei derivati benzoilici.

Naturalmente in questo modo si ha l'inconveniente di perdere, perchè viene distrutta dall'ossidante, una porzione non piccola dall'isomero p. f. 156°, mentre l'altra parte del medesimo si ottiene facilmente, perchè, essendo meno solubile, è il primo che ricristallizza dai solventi ed allo stato quasi puro.

Questa differenza di comportamento, rispetto agli ossidanti, degli azossifenoli isomeri rammenta le differenze, che a suo tempo vennero descritte, che gli isomeri monosostituiti presentano all'azione degli alogeni e dell'acido nitrico. Nel caso p. es. dei due derivati parasostituiti:

$$O=N.C_6H_5 \qquad\qquad N.C_6H_5$$
$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$
$$N.C_6H_4Br \qquad\qquad O=N.C_6H_4Br\ ,$$

solamente il secondo fornisce con tutta facilità i corrispondenti prodotti del pari parasostituiti:

$$Br.C_6H_4.N=N(:O).C_6H_4Br$$

$$NO_2.C_6H_4.N=N(:O).C_6H_4Br\ ,$$

mentre il primo rimane inalterato. Ciò dimostra che l'atomo di ossigeno dell'azossigruppo, nel mentre protegge dall'azione degli alogeni e dell'acido nitrico l'anello aromatico unito allo stesso atomo di azoto, esercita altresì una azione protettiva sullo stesso anello rispetto all'azione del permanganato.

Le nostre ulteriori ricerche hanno confermato che questa influenza protettiva, esercitata dall'atomo di ossigeno dell'azossigruppo, si estende anche all'azione dell'acido nitroso, quando si operi a freddo e in soluzione diluita; in questo caso però si ha il vantaggio, che nel mentre uno degli azossifenoli isomeri si riottiene inalterato, l'altro, invece di esser distrutto, viene trasformato in un nitroderivato, che, in generale, si può facilmente caratterizzare: la reazione procede rapida e pochi decigrammi del prodotto di partenza sono per lo più sufficienti per fissarne senz'altro la struttura.

Abbiamo incominciato con lo stabilire che l'azobenzolo (1), l'azossibenzolo (2), l'etere etilico del p-α-azossifenolo (3), il p β-azossifenolo (4) ed il p-nitrofenolo (5) rimangono inalterati, quando alla loro soluzione in acido

acetico glaciale si aggiunge poco per volta e a freddo un eccesso di nitrito sodico:

(1) $C_6H_5 . N = N . C_6H_5$

(2) $C_6H_5 . N = O$
$C_6H_5 . N$

(3) $C_6H_5 . N = O$
$(C_2H_5O)C_6H_4 . N$

(4) $C_6H_5 . N$
$(HO)C_6H_4 . N = O$

(5) $(HO)C_6H_4 . N = O$
O

Invece abbiamo potuto constatare che il p-ossiazobenzolo (6), il p-p'-diossiazobenzolo (7), il p-α-azossifenolo (8) ed il p-p'-diossiazossibenzolo (9), a parità di trattamento, forniscono con tutta facilità nitroderivati, nei quali i gruppi nitrici occupano sempre le posizioni orto rispetto all'ossidrile:

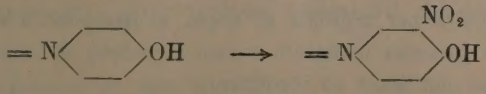
(6) $N . C_6H_5$ → $N . C_6H_5$
$N . C_6H_4(OH)$ → $N . C_6H_3(OH)NO_2$

(7) $N . C_6H_4(OH)$ → $N . C_6H_3(OH)NO_2$
$N . C_6H_4(OH)$ → $N . C_6H_3(OH)NO_2$

(8) $O = N . C_6H_5$ → $O = N . C_6H_5$
$N . C_6H_4OH$ → $N . C_6H_3(OH)NO_2$

(9) $O = N . C_6H_4OH$ → $O = N . C_6H_4OH$
$N . C_6H_4OH$ → $N . C_6H_3(OH)NO_2$

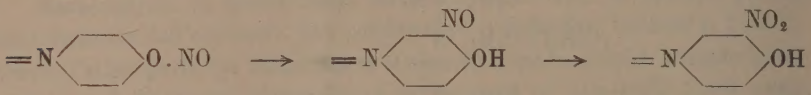
Ciò dimostra dunque che, *per reagire con l'acido nitroso, non è sufficiente che l'anello aromatico contenga un ossidrile*, ma che *invece è necessario che l'anello che porta l'ossidrile sia altresì congiunto ad un atomo di azoto trivalente*:



Si tratta dunque di una influenza concomitante del gruppo ossidrilico e dell'atomo di azoto situati in posizione para ad uno stesso anello aromatico.

Diremo poi fino da ora che è poco probabile che in una prima fase si formi un nitrito all'azoto e che poi il residuo nitroso migri all'atomo di carbonio in posizione meta, perchè, come è noto, queste migrazioni si compiono sempre verso le posizioni orto oppure para: in questo caso il residuo nitroso potrebbe tutto al più portarsi prima all'ossidrile situato in para e da qui migrare successivamente alla posizione orto.

Molto più semplice è invece l'ammettere la formazione di un etere nitroso che poi passa a o-nitrosoderivato ed infine a nitrocomposto:



Accenneremo infine che, nell'azione dell'acido nitroso sopra il p-p'-diossiazobenzolo assieme al dinitroderivato si forma anche del p-nitrofenolo e ciò dimostra che in questo caso il reattivo ha agito in parte come ossidante.

Questa ossidazione corrisponde perfettamente a quella che subisce l'acido iponitroso per azione del permanganato, operando prima in soluzione alcalina (formazione di nitrito), e successivamente in soluzione acida (formazione di nitrato); e procede in modo conforme anche alla regola stabilita da uno di noi, secondo la quale i due sostituenti situati in posizione para ovvero orto di un anello aromatico si comportano in alcune reazioni come se fossero congiunti direttamente fra di loro [1], vale a dire come se l'anello aromatico non esistesse: in questo caso il p-diossiazobenzolo corrisponde all'acido iponitroso ed il p-nitrofenolo all'acido nitrico:

$$\begin{matrix} N.(C_6H_4).OH \\ \| \\ N.(C_6H_4).OH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} O_2N.(C_6H_4).OH \\ O_2N.(C_6H_4).OH \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} N.OH \\ \| \\ N.OH \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} O_2N.OH \\ O_2N.OH \end{matrix}$$

Dati sperimentali.

L'azocomposto oppure l'azossiderivato vennero sciolti a freddo nella sufficiente quantità di acido acetico glaciale e quindi trattati, a temperatura ordinaria, poco per volta con nitrito sodico in polvere: per ogni ossidrile contenuto nel composto di partenza, si presero circa due molecole di nitrito. Ad operazione finita, per aggiunta di acqua, si ottengono, a seconda dei casi, o il prodotto di partenza inalterato ovvero i prodotti di reazione, che facilmente si possono purificare ed identificare.

[1] R. A. L., *26* (1917), 1° sem., pp. 480 e segg.

Nitroazofenolo ottenuto dal p-azofenolo:

$$C_6H_5.\underset{(4)}{N=N}.C_6H_3<\begin{matrix}NO_2(2)\\OH\ (1)\end{matrix}.$$

Solubile in alcali e riprecipitabile con acido carbonico dalla soluzione alcalina; poco solubile in ligroina, molto in benzolo da cui cristallizza in pagliuzze giallo-chiare che fondono nettamente a 128°.

Gr. 0,0723 di sostanza dettero cc³. 10,6 di N, a 12°,5 e 749 mm.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_9O_3N_3$
N	17,28 %	17,28 %

È identico a quello ottenuto da Nölting (¹) per azione del cloruro di diazobenzolo sopra l'orto-nitrofenolo e da Hewitt (²) per nitrazione con acido nitrico a 40° del p-azofenolo.

Dinitrodiossiazobenzolo ottenuto dal p-p'-diossiazobenzolo:

$$\begin{matrix}(2)O_2N\\(1)\ HO\end{matrix}>C_6H_3.\underset{(4)}{N=N}.C_6H_3<\begin{matrix}NO_2(2')\\OH\ (1')\end{matrix}.$$

Poco solubile in etere, alcool, benzolo. Cristallizza lentamente da acido acetico glaciale in aghetti giallo-verdastri lucenti che schiariscono disseccandosi e fondono con decomposizione a 236°, annerendo 3 gradi prima.

Gr. 0,1136 di sostanza dettero, a 13°,7 e 746,8 mm., cc³. 17,7 di N.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_8O_6N_4$
N	18,26 %	18,42 %

Esso è probabilmente identico a quello ottenuto da Robertson (³) per azione dell'acido nitrico concentrato sopra il p-p'-diossiazobenzolo sciolto in acido acetico, e che fonde a 240°.

Dalle acque madri acetiche, diluite con acqua, si estrae con etere il p-nitrofenolo, che dopo diverse cristallizzazioni da benzolo si ha in aghi giallo-chiari fondenti a 113°.

Nitroazossifenolo ottenuto dal p-α-azossifenolo:

$$C_6H_5.\underset{\underset{O}{\|}}{N}=\underset{(4)}{N}.C_6H_3<\begin{matrix}NO_2(2)\\OH\ (1)\end{matrix}.$$

Molto solubile in alcool e benzolo. Cristallizza da benzolo in cristallini tabulari romboedrici giallo-verdastri trasparenti, che dànno una polvere

(¹) Berliner Berichte. *20*. 2997.
(²) Soc., *77*, pag. 99.
(³) Soc., *103*, pag. 1473.

giallo-chiara. Dall'alcool cristallizza in minute pagliuzze verdastre. Fonde nettamente a 125°.

I. Gr. 0,1127 di sostanza dettero, a 11° e 758 mm., cc³. 15,3 di N.

II. Gr. 0,0608 di sostanza dettero, a 11°,5 e 750 mm., cc³. 8,3 di N.

III. Gr. 0,1572 di sostanza dettero gr. 0,0528 di H_2O e gr. 0,3223 di CO_2.

	Trovato			Calcolato
	I	II	III	per $C_{12}H_8O_4N_2$
C	—	—	55,93 %	55,58 %
H	—	—	3,75 %	3,5 %
N	16,26 %	16,19 %	—	16,22 %

Nitrodiossiazossibenzolo ottenuto dal p-p'-diossiazossibenzolo:

$$HO.C_6H_4.\underset{\underset{O}{\|}}{N}=N.C_6H_3<\begin{matrix}NO_2\,(2)\\OH\,(1)\end{matrix}\,(4)$$

Aghi giallo-rossastri brillanti dall'alcool diluito 60 %, minute pagliuzze rossastre dall'alcool concentrato, che dànno una polvere aranciata. Fonde, con forte decomposizione, a 193°.

Gr. 0,1376 di sostanza dettero, a 12° e 745,5 mm., cc³. 17,92 di N.

	Trovato	Calcolato per $C_{12}H_8O_5N_2$
N	15,30 %	15,27 %

Continueremo lo studio di queste reazioni.

Geometria. — *Sui complessi covarianti di tre complessi lineari a due a due in involuzione.* Nota II del Corrispond. Luigi Berzolari.

6. Consideriamo una generatrice del regolo S', e tra le sue equazioni (4) e la (6) eliminiamo x_1 e x_3. Scrivendo che l'equazione risultante è identicamente soddisfatta rispetto ad x_2 e x_4, si ottiene per λ l'unica equazione quadratica

$$(10)\qquad p_{31}(p_{12}-p_{34})\lambda^2-(p_{31}^2-p_{24}^2)\lambda-p_{24}(p_{12}-p_{34})=0,$$

il cui discriminante, eguagliato a zero, dà

$$(11)\qquad (p_{31}^2-p_{24}^2)^2+4\,p_{31}\,p_{24}\,(p_{12}-p_{34})^2=0,$$

ossia

$$(11')\qquad \Theta\equiv K_2^2\,K_3^2+K_3^2\,K_1^2+K_1^2\,K_2^2=0.$$

Si ha così il teorema:

La quadrica corrispondente ad una retta generica dello spazio incontra la quadrica Q *lungo due generatrici del regolo* S *e due del regolo* S'. *Il luogo delle rette, le cui quadriche corrispondenti passano per due generatrici di* S' *tra loro coincidenti è il complesso* Θ *di quarto grado, rappresentato dall'equazione* (11') [1].

7. Lo studio dei coni del complesso Θ è strettamente collegato con la considerazione di altri complessi di primo e secondo grado, che pure risultano determinati dai dati complessi K_1, K_2, K_3.

Anzitutto osserviamo che le generatrici di S' segnano sulle coppie di rette $e_1 e_1', \dots, e_4 e_4'$ altrettante omografie, e i luoghi delle rette da cui queste vengono proiettate secondo fasci involutori sono risp. i quattro complessi lineari $L_1, \dots, L_4$ [2] aventi le equazioni

$$L_1 \equiv -K_1 + K_2 + K_3 = 0 \ , \ L_2 \equiv K_1 - K_2 + K_3 = 0 \ ,$$
$$L_3 \equiv K_1 + K_2 - K_3 = 0 \ , \ L_4 \equiv K_1 + K_2 + K_3 = 0 \ .$$

I medesimi complessi sono pure risp. i luoghi delle ∞^1 congruenze lineari che hanno per direttrici due rette di S' separate armonicamente da $e_1 e_1', \dots, e_4 e_4'$.

Essi appartengono alla rete individuata da K_1, K_2, K_3, ma non sono in involuzione nè con questi nè tra loro.

La polarità rispetto a Q e la polarità nulla determinata da L_i sono permutabili, ed hanno per prodotto l'involuzione rigata di assi $e_i e_i'$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

In secondo luogo, si considerino le quattro quadriche $F_1, \dots, F_4$ determinate (n. 4) da una retta r con le coppie di rette $e_1 e_1', \dots, e_4 e_4'$; dicasi y $(y_1, \dots, y_4)$ un loro punto comune giacente su r, e si denotino ancora con K_1, K_2, K_3 i risultati che si ottengono sostituendo nei primi membri delle (1), al posto delle coordinate correnti, le coordinate di r. Sussiste l'identità

$$K_1 \sum_1^4{}_i \, y_i \frac{\partial A_1}{\partial x_i} + K_2 \sum_1^4{}_i \, y_i \frac{\partial A_2}{\partial x_i} + K_3 \sum_1^4{}_i \, y_i \frac{\partial A_3}{\partial x_i} = 0 \ ,$$

col mezzo della quale, se si rappresentano con $(F_1) = 0, \dots, (F_4) = 0$ i piani tangenti in y a $F_1 = 0, \dots, F_4 = 0$, si riconosce che si può porre

$$(F_3) \equiv (K_2 + K_3)(F_1) + (K_1 + K_3)(F_2) \ ,$$
$$(F_4) \equiv (K_1 - K_3)(F_1) + (K_2 - K_3)(F_2) \ .$$

[1] Perchè invece coincidano le generatrici di S contenute nella quadrica corrispondente ad una retta, è ovvio esser necessario e sufficiente che questa retta sia tangente a Q.

[2] Cfr. la mia Nota citata *Sul significato geometrico* , ...

Se ne deduce la proprietà:

Se in un punto qualunque di r si conducono i piani tangenti alle quadriche $F_1, \dots, F_4$, il loro birapporto non dipende dal punto, ma soltanto dalla retta r.

Inoltre:

Il luogo delle rette r, per le quali il gruppo dei quattro piani tangenti è armonico, è formato dai tre complessi di secondo grado

$$H_1 \equiv K_2^2 + K_3^2 - 2K_1^2 = 0 \ , \ H_2 \equiv K_3^2 + K_1^2 - 2K_2^2 = 0 \ ,$$
$$H_3 \equiv K_1^2 + K_2^2 - 2K_3^2 = 0 \ ,$$

e, denotando con ε una radice cubica imaginaria dell'unità:

Il luogo delle rette r, per le quali il gruppo dei quattro piani tangenti è equianarmonico, consta dei due complessi di secondo grado

$$K' \equiv K_1^2 + \varepsilon^2 K_2^2 + \varepsilon K_3^2 = 0 \ , \ K'' \equiv K_1^2 + \varepsilon K_2^2 + \varepsilon^2 K_3^2 = 0 \ .$$

8. Le equazioni dei cinque complessi quadratici del num. precedente mostrano che questi hanno per rette doppie tutte le generatrici di S.

Ciascuno dei complessi H_1, H_2, H_3 ha inoltre per rette doppie risp. le coppie di generatrici $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$ di S': infatti per es. il cono di H_1 che ha per vertice un punto y di d_1 si riduce al piano tangente in y a Q, contato due volte.

Per una nota regola [1], le rette singolari, ad es., di H_1 si ottengono dalle equazioni

$$(p_{12} - p_{34})^2 = 0 \ , \ p_{31} p_{24} = 0 \ .$$

Sicchè le rette singolari dei complessi H_1, H_2, H_3 costituiscono le congruenze lineari speciali (ognuna contata due volte) aventi per direttrici risp. le coppie di rette $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$ (ossia le congruenze formate dalle tangenti a Q nei punti di tali rette). I medesimi complessi hanno dunque, nella classificazione di Weiler e di Segre [2], la caratteristica [(111) (11) 1].

I complessi K' e K'' sono entrambi di caratteristica [(111) 111], e posseggono un sistema lineare ∞^2 di complessi lineari fondamentali, cioè tutti quelli che passano per il regolo S', e inoltre tre complessi fondamentali isolati, che sono K_1, K_2, K_3.

Sì per l'uno che per l'altro la congruenza delle rette singolari si scompone nelle quattro congruenze lineari rappresentate dalle coppie di equazioni

$$p_{12} - p_{34} \pm (i-1) p_{24} = 0 \ , \quad p_{31} - i p_{24} = 0 \ ;$$
$$p_{12} - p_{34} \pm (i+1) p_{24} = 0 \ , \quad p_{31} + i p_{24} = 0 \ ,$$

[1] Plücker, *Neue Geometrie des Raumes*, Zweite Abth., herausg. von F. Klein, Leipzig 1869, pag. 296.

[2] Weiler, *Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades*, Math. Ann., Bd. 7 (1874), pag. 145; Segre, *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*, Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino, Serie II, vol. 36 (1885), pag. 87.

ossia in quelle che hanno per direttrici $e_1 e'_1, \ldots, e_4 e'_4$. La quaterna focale consta per K' delle rette $e_1, \ldots, e_4$, per K'' delle $e'_1, \ldots, e'_4$ (1): vale a dire, per es., il cono di K' avente per vertice un punto di e_i si riduce al piano che dal punto proietta e'_i, contato due volte.

I coni di K' e K'' aventi il vertice in un punto generico y di Q si spezzano in due coppie armoniche di piani, passanti per la generatrice di S che esce da y.

9. Denotando con $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ le espressioni in cui si cangiano i primi membri delle (1) quando si ponga $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$, le equazioni $\Gamma_1 = 0$, $\Gamma_2 = 0$, $\Gamma_3 = 0$ rappresentano i piani focali del punto y $(y_1, \ldots, y_4)$ rispetto a K_1, K_2, K_3; e le equazioni

$$\Gamma_2 \pm i\Gamma_3 = 0 \quad , \quad \Gamma_3 \pm i\Gamma_1 = 0 \quad , \quad \Gamma_1 \pm i\Gamma_2 = 0$$

rappresentano i piani che da y proiettano le coppie di rette $d_1 d'_1, d_2 d'_2, d_3 d'_3$. Perciò dai numeri precedenti e dalle note proprietà della *lemniscata proiettiva* (curva del quart'ordine con tre nodi a tangenti inflessionali) (2) si deduce:

Il cono del complesso Θ avente il vertice in un punto generico y dello spazio ha tre generatrici nodali, che sono le rette condotte per y a tagliare le coppie di rette $d_1 d'_1, d_2 d'_2, d_3 d'_3$, *e lungo quelle generatrici ha piani tangenti inflessionali, che sono i piani proiettanti da y le coppie stesse di rette.*

I quattro piani bitangenti del cono sono i piani focali di y rispetto ai complessi lineari $L_1, \ldots, L_4$; *e le otto generatrici di contatto appartengono al cono circoscritto da y a* Q.

Gli stessi quattro piani sono le facce di un angolo tetraedro completo, il cui « angolo quadrispigolo associato » ha per spigoli le rette che, partendo da y, si appoggiano alle coppie di rette $e_1 e'_1, \ldots, e_4 e'_4$.

Il triedro diagonale comune all'angolo tetraedro e all'angolo quadrispigolo ha per spigoli le rette che escono da y e si appoggiano alle coppie di rette $d_1 d'_1, d_2 d'_2, d_3 d'_3$.

Il cono quadrico invariante dell'angolo tetraedro (rispetto al quale questo è polare reciproco dell'angolo quadrispigolo associato) è il cono circoscritto da y a Q.

Il luogo delle rette uscenti da y e da cui gli spigoli dell'angolo quadrispigolo sono proiettati secondo quattro piani formanti un gruppo armonico, oppure un gruppo equianarmonico, si decompone nei coni di ver-

(1) Cfr. su ciò il n. 168 della citata Memoria del Segre, dove sono pure corrette varie inesattezze in cui è incorso il Weiler.

(2) Ved., anche per citazioni, le mie Note: *Sulla lemniscata proiettiva*, Rend. del R. Istituto Lombardo, Serie II, vol. 37 (1904), pp. 277 e 304; *Sulla polarità rispetto ad un quadrilatero piano completo*, id., Serie II, vol. 49 (1916), pag. 463.

tice y appartenenti, nel primo caso, ai complessi H_1, H_2, H_3, *nel secondo ai complessi* K', K''.

I complessi K' *e* K'' *godono altresì della proprietà che i loro coni di vertice y hanno per piani tangenti tutti e soli i piani che tagliano le facce dell'angolo tetraedro in quattro rette formanti un gruppo equianarmonico.*

Invece l'inviluppo dei piani per y che incontrano le stesse facce in quattro rette armoniche si scompone nei coni di vertice y appartenenti ai tre complessi quadratici

$$-K_1^2+2K_2^2+2K_3^2=0\,,\quad 2K_1^2-K_2^2+2K_3^2=0\,,\quad 2K_1^2+2K_2^2-K_3^2=0\,.$$

Anche questi tre ultimi complessi sono di caratteristica [(111) (11) 1], ed hanno risp. in comune con H_1, H_2, H_3 le rette singolari e le rette doppie.

Ciascuno degli otto complessi quadratici è trasformato in sè dalla polarità rispetto a Q, come pure dalle polarità nulle dovute a K_1, K_2, K_3.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve piane.* Nota I di Gustavo Sannia, presentata dal Socio Enrico D'Ovidio.

1. In questa e in successive Note mostrerò che la geometria *proiettivo-differenziale* delle curve piane, fondata da Halphen [1] e sviluppata sistematicamente dal Wilczynski [2], può edificarsi nel modo più rapido e diretto, adoperando il *calcolo differenziale assoluto con una variabile* [3] ed un procedimento che si ispira a quello usato dal Fubini [4] per le varietà V_n di un S_{n+1} con $n > 1$ (quindi con esclusione del caso $n = 1$, di cui mi occupo). E le darò la più completa analogia con la corrispondente teoria metrica, definendo *l'arco* [5], *la curvatura*, *l'equazione intrinseca*, *la normale*, ecc., *proiettivi*.

[1] *Oeuvres*, tom. II, p. 195.

[2] *Projective diff. geom. of curves and ruled surfaces*, cap. III (Teubner, Leipzig. 1906).

[3] Che ho dato in una Nota degli Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. LVII, p. 293, ove ho anche ricostruita la geometria *affine differenziale* delle curve piane (e sghembe, in una Nota successiva).

[4] *Fondamenti di geometria proiettivo-differenziale*, (Rend. Circ. Mat. di Palermo, tom. XLIII).

[5] Già definito da Wilczynsky: *Integral invariants in projective geometry* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tom. 42, an. 1917, p. 128).

2. Anzitutto riporto da loc. cit. (1) qualche cenno sul calcolo assoluto.

Sia L una legge che faccia corrispondere ad ogni funzione U di una variabile u un'altra U' di una variabile u': dico che L è *legge di covarianza* e che U è *un covariante di ordine n* (ed allora lo indico con U_n) se $U'_n = U_n\,(du:du')^n$ (n intero) per ogni trasformazione invertibile tra u e u'.

Se $n = 0$, L è legge di *invarianza* e $U = U_0$ è un *invariante*.

$U_n + V_n$, $U_n W_m$, $U_n : W_m$ sono covarianti di ordine n, $n+m$, $n-m$.

Se

$$A = a_1\,du \tag{1}$$

è un differenziale primo e ad a_1 si fa corrispondere a'_1, ove $A' = a'_1\,du'$ è il trasformato di A, a_1 è covariante di 1° ordine, quindi a_1^n di ordine n. Lo stesso du è covariante di ordine -1, quindi $V_1\,du$ lo è di ordine 0 (invariante).

L'espressione

$$U_{n+1} = dU_n/du - n\,S\,U_n\,, \qquad \text{ove} \qquad S = da_1/a_1\,du\,, \tag{2}\ (3)$$

è un covariante di ordine $n+1$ che chiamo *prima derivata covariante* di U_n rispetto ad A (e che *coincide con l'ordinaria se* $a_1 = cost.$ *o* $n = 0$). *La derivata* a_2 *di* a_1 *rispetto ad* A *è nulla.*

La derivazione covariante si applica ad un covariante U_n, che sia funzione razionale di altri covarianti, *con le regole del calcolo ordinario.*

Applicata nuovamente, dà la *derivata seconda* U_{n+2}, ecc.

Con le derivate covarianti di una funzione U e con a_1 si formano i *parametri differenziali* (1°, 2°, ...) di U (tutti invarianti), $U_1 : a_1$, $U_2 : a_1^2$, ...

3. Una curva piana Γ sia definita dando le coordinate (cartesiane o proiettive) omogenee di un suo punto generico P in funzione di un parametro u:

$$x = x(u)\quad,\quad y = y(u)\quad,\quad z = z(u)\,. \tag{4}$$

Scelto che sia il fattore arbitrario di proporzionalità $h = h(u)$, insito nella definizione di coordinate omogenee, le (4) costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni di una ben determinata equazione differenziale

$$f''' + 3\beta f'' + 3\gamma f' + \delta = 0\,. \tag{5}$$

purchè Γ (nell'arco che si considera) *sia priva di flessi* (quindi anche *che non sia una retta*) come sempre supporrò.

Gli altri infiniti sistemi analoghi daranno tutte le curve collineari a Γ.

(1) Ved. nota (3) a pag. prec.

E, viceversa, una equazione del tipo (5) definisce, coi suoi sistemi fondamentali di soluzioni, una curva Γ e le sue collineari o, come suol dirsi, una curva Γ *a meno di una collineazione.*

4. Tutto ciò è ben noto. Ora la (5) può porsi, ed in infiniti modi, *sotto forma invariantiva*, sostituendo alle f', f'', f''' le derivate covarianti rispetto ad un differenziale (1) scelto ad arbitrio. Precisamente, essendo, per la (2),

$$(6) \qquad f' = f_1 \quad , \quad f'' = f_2 + \mathrm{S} f_1 \quad , \quad f''' = f_3 + 3\mathrm{S} f_2 + (\mathrm{S}^2 + \mathrm{S}') f_1 \qquad (\mathrm{S}' = d\mathrm{S} : du),$$

la (5) può scriversi

$$(5') \qquad f_3 + 3b_1 f_2 + 3c_2 f_1 + d_3 f = 0 ,$$

ove

$$(7) \qquad b_1 = \beta + \mathrm{S} \quad , \quad c_2 = \gamma + \beta\mathrm{S} + (\mathrm{S}^2 + \mathrm{S}')/3 \quad , \quad d_3 = \delta .$$

Ogni termine di (5′) *è covariante di 3° ordine, perchè* b_1, c_2, d_3 *lo sono degli ordini* 1, 2 e 3 [1]. Ciò risulta dalle loro espressioni mediante le (4):

$$(8) \qquad 3b_1 = -\frac{|x\, x_1\, x_{3\,1}|}{|x\, x_1\, x_2|}, \quad 3c_2 = \frac{|x\, x_2\, x_3|}{|x\, x_1\, x_2|}, \quad d_3 = -\frac{|x_1\, x_2\, x_3|}{|x\ x_1\, x_2|} \ (^2)$$

che permettono di costruire la (5′) direttamente, anzichè passando per la (5).

I coefficienti di (5′) dipendono non solo da h, come quelli di (5), ma anche da A.

Normalizzando (ossia fissando) h ed A con legge intrinseca ed invariante per coll., perverremo ad un'equazione *normale*, che sarà in corrispondenza biunivoca con Γ (e le sue collineari).

Anzitutto, se si pone

$$(9) \qquad f = \lambda\varphi \quad \text{con} \quad (10) \quad \lambda = e^{-\int b_1 du} = e^{-\int \beta du} : a_1 ,$$

la (5′) si trasforma nell'altra

$$(11) \qquad \varphi_3 + 3p_2\varphi_1 + q_3\varphi = 0$$

i cui coefficienti valgono (come si vede con facile calcolo)

$$(12) \qquad p_2 = c_2 - b_1^2 - b_2 \quad , \quad q_3 = d_3 - 3b_1c_2 + 2b_1^3 - b_3$$

(1) Sicchè, per eseguire una trasformazione $u = u(u')$, basta sostituire $u(u')$ ad u nei coefficienti ed interpretare le f_1, f_2, f_3 come derivate covarianti rispetto ad A′ trasformato di A.

(2) Con $|x_r x_s x_t|$ indico il determinante di 3° ordine le cui rimanenti orizzontali si deducono dalla prima (quella scritta) cambiandovi x in y o in z; *esso è covariante di ordine* $r + s + t$. Si noti che, per le (6), $|x\, x_1\, x_2| = |x\, x'\, x''|$ ed è perciò *indipendente da* A *e diverso da zero*; esso è un primo *invariante relativo* di (5) o (5′).

e sono covarianti di ordine 2 e 3 rispetto ad A *che dipendono solo da* A [1].

Per vedere come variano variando A, confrontiamo la (11) con quella che corrisponde al particolare $A = du$: sia

$$\psi''' + 3\pi\psi' + \chi\psi = 0 . \tag{13}$$

Poichè questa non è che una delle infinite forme che può assumere la (5) variando il fattore h, si deve poterla trasformare nella (11), operando su di essa come si è fatto con la (5): si trova così anzitutto un'equazione del tipo (5′) con

$$b_1 = S \quad c_2 = \pi + (S^2 + S')/3 \quad , \quad d_3 = \chi , \tag{14}$$

giusta le (7); e poi la (11), ove, per le (12), sarà

$$p_2 = \pi + (S^2 - 2S')/3 \quad , \quad q_3 = \chi - 3S\pi + 3SS' - S'' - S^3 \ [2]. \tag{15}$$

Le (15) *mostrano come variano* p_2 e q_3 *in* (11) *variando* A (*quindi* S).

È importante la relazione $q_3 - 3p_3/2 = \chi - 3\pi'/2$ che se ne deduce eliminando S [3]; perchè essendo i due membri formati *con la stessa legge*, ma rispettivamente con i coefficienti di (11) ed A e coi coefficienti di (13) e du, prova che

$$\theta_3 = q_3 - 3p_3/2 = \chi - 3\pi'/2 \tag{16}$$

è un covariante di 3° ordine indipendente da A [4].

Dunque, *se* $\theta_3 \neq 0$ *lungo l'arco di* Γ *considerato* [5], potremo normalizzare A assumendo

$$A = a_1\, du \quad \text{con} \quad a_1 = \sqrt{\theta_3} . \tag{17}$$

La corrispondente (11) sarà la richiesta *equazione normale*. Un suo sistema fondamentale di soluzioni sarà costituito dalle coordinate omogenee

[1] *E non più da h*. Poichè se le (11), corrispondenti a due scelte diverse h', h'' di h, fossero distinte, dovrebbero potersi dedurre l'una dall'altra con una trasformazione del tipo (9) (con $\lambda = h' : h''$ o $h'' : h'$); e ciò è impossibile, perchè per ogni trasformazione (9) la (11) perde la sua forma caratteristica (mancanza del termine in φ_2). A meno che sia $\lambda =$ costante; ma in tal caso, come risulta dalle (7), i coefficienti di (11) non mutano.

[2] Si tenga presente che, per la (2), si ha successivamente $b_2 = b_1 - Sb_1 = S' - S^2$, $b_3 = b_2' - 2Sb_2 = (S'' - 2SS') - 2S(S' - S^2) = S'' - 4SS' + 2S^3$.

[3] È precisamente tra la 2ª e la $p_3 = p_2' - 2Sp_2 = \pi' - 3S\pi + 2(3SS' - S'' - S^3)/3$, che si ottiene dalla 1ª derivando covariantemente rispetto ad A.

[4] È un secondo, cfr. [6], *invariante relativo* di (5) o (5′) (Laguerre).

[5] *E così supporremo sempre da ora innanzi*. Con ciò *si esclude che* Γ *sia una conica*, perchè *solo nelle coniche è* $\theta_3 = 0$ *identicamente* (Laguerre). Infatti, supposto $\theta_3 = 0$, scegliamo un $A = a_1\, du$ tale che risulti $p_2 = 0$, il che, per le (15), equivale a scegliere un S che soddisfi l'equazione di Riccati $2S' - S^2 - 3\pi = 0$. Allora risulterà $q_3 = \theta_3 = 0$ e la (11) diventerà $\varphi_3 = 0$, e poi $\varphi''' = 0$ se si cambia la u col porre $a_1\, du = dv$. Ora questa ha il sistema fondamentale $x = v^2$, $y = v$, $z = 1$ che definisce una conica.

x, y, z di P, *ma col fattore h fissato* (1) *in modo intrinseco ed invariante per coll.*: le dirò *coordinate normali* di P.

5. La funzione $\sigma(u)$ il cui differenziale è (17) è l'*arco proiettivo* di Γ, nel senso che $\sigma(u) - \sigma(u_0)$ è la *lunghezza proiettiva* dell'arco di Γ limitato dai punti $P_0(u_0)$ e $P(u)$ (Wilczynski). Dirò poi:

(18) $\quad K = k_1\, du$ con $k_1 = 3p_2 : a_1$, *angolo di contingenza*;

(19) $\quad 1 = K : A = 3p_2 : a_1^2$, *curvatura*;

(20) $\quad 1 : I$, *raggio di curvatura*

(*proiettivi*) di Γ in P.

I parametri differenziali (n. 2) primi e secondi delle coordinate normali x, y, z di P

(21) $\quad (x_1 : a_1\ ,\ y_1 : a_1\ ,\ z_1 : a_1)\ ,\ (x_2 : a_1^2\ ,\ y_2 : a_1^2\ ,\ z_2 : a_1^2)$

sono le coordinate di due punti T, N *intrinseci e invarianti per coll.* (2); quindi tali saranno le rette $t = PT$, $n = PN$, sempre distinte, essendo $|x\, x_1\, x_2| \neq 0$: la 1ª è la *tangente*, e la 2ª assumerò come *normale proiettiva* di Γ in P.

Un punto di t (di n) ha coordinate del tipo $x + hx_1/a_1, \ldots$ $(x + h x_2/a_1^2, \ldots)$, con h intrinseco ed invariante se tale è la definizione del punto: in tal caso dirò che h è la *distanza proiettiva* del punto da P; e dirò *centro di curvatura proiettiva* quel punto C di n per cui $h = 1 : I$.

Matematica. — *Sopra alcune formule di risoluzione di certe equazioni integrali di Volterra.* Nota di Francesco Sbrana, presentata dal Corrisp. Gino Loria.

1. Consideriamo l'equazione integrale di prima specie

(1). $$\int_0^{\xi} \varphi(u)\, K(\xi - u)\, du = \Phi(\xi),$$

dove, naturalmente, $\Phi(0) = 0$, e supponiamo che $K(\xi)$ e $\Phi(\xi)$ siano definite per tutti i valori di ξ, in forma tale, che gl'integrali

$$\int_0^{\infty} e^{-\xi}\, K(v\xi)\, d\xi \quad , \quad \int_0^{\infty} e^{-\xi}\, \varphi(v\xi)\, d\xi,$$

esistano, e siano finiti quando v varia in un intorno, conveniente, dell'origine.

(1) A prescindere da un coefficiente numerico (senza importanza) per l'ultima proposizione di (8).

(2) Perchè cogredienti a x, y, z. E così in generale $(x_n : a_1^n\ ,\ y_n : a_1^n\ ,\ z_n : a_1^n)$.

Posto, quindi, nella (1), $\xi = vr$, $u = vt$, moltiplichiamo per $e^{-r}\,dr$, e integriamo, tra i limiti zero e ∞; risulta

$$v\int_0^\infty e^{-r}\,dr\int_0^r \varphi(vt)\,\mathrm{K}[v(r-t)]\,dt = \int_0^\infty e^{-r}\,\Phi(vr)\,dr\,.$$

Eseguiamo ora, nel primo membro, uno scambio di integrazioni, facendo uso della nota formula di Dirichlet, e poniamo poi $x = t$, $y = r - t$: otteniamo subito

$$v\int_0^\infty e^{-x}\,\varphi(vx)\,dx\int_0^\infty e^{-y}\,\mathrm{K}(vy)\,dy = \int_0^\infty e^{-r}\,\Phi(vr)\,dr\,.$$

L'equazione (1) è così trasformata nell'altra

$$v\int_0^\infty e^{-x}\,\varphi(vx)\,dx = \mathrm{F}(v)\,, \tag{2}$$

essendo

$$\mathrm{F}(v) = \frac{1}{\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{K}(vx)\,dx}\int_0^\infty e^{-x}\,\Phi(vx)\,dx\,.$$

Se poi $\mathrm{K}(v)$ e $\Phi(v)$ sono funzioni analitiche, lo è pure, in un conveniente intorno dell'origine, dove si annulla del primo ordine [1], $\mathrm{F}(v)$. Dalla (2) segue allora, com'è noto [2],

$$\varphi(v) = \frac{1}{2\pi i\,v}\int_c e^z\,\mathrm{F}\left(\frac{v}{z}\right)dz\,, \tag{3}$$

dove c è, nel piano della variabile complessa z, un contorno chiuso, semplice, descritto nel senso positivo attorno all'origine, entro il quale la $\mathrm{F}(v)$ è regolare. Si verifica, del resto facilmente, che la funzione $\varphi(v)$, definita dalla (3), è soluzione della (2); basta per ciò aver presenti le note formule

$$\Pi(\lambda) = \int_0^\infty e^{-x}\,x^\lambda\,dx\,,\quad \frac{1}{\Pi(\lambda)} = \frac{1}{2\pi i}\int_c e^z\,z^{-\lambda-1}\,dz\,, \tag{4}$$

nella seconda delle quali, per λ intero (non negativo), si può scegliere per c il contorno stesso che compare nella (3) [3]. Posto, infatti,

$$\mathrm{F}(v) = v\sum_n^\infty a_n\,v^n\,,$$

[1] Ciò è chiaro, se $\mathrm{K}(0) \neq 0$; ma risulta anche quando sia, più in generale, $\mathrm{K}(0) = \mathrm{K}'(0) = \cdots = \mathrm{K}^{(n-1)}(0) = 0$, e $\mathrm{K}^{(n)}(0) \neq 0$; basti osservare che, affinchè la (1) sia risolubile, dovrà essere pure $\Phi(0) = \Phi'(0) = \cdots = \Phi^{(n)}(0) = 0$, come si vede, derivando n volte la (1).

[2] Sotto altra forma, la (3) si trova, p. es., nelle *Leçons sur les fonctions monogènes* del Borel; 1917, pagg. 46 e 47.

[3] Cfr., p. es., Whittaker and Watson, *A cours of modern Analysis*, 1915, pagine 237 e 239. D'altra parte, per λ intero (non negativo), la seconda delle (4) si ottiene subito, sviluppando in serie e^z, e integrando termine a termine.

dalla (3) abbiamo

$$v\int_0^\infty e^{-\alpha}\varphi(vx)\,dx=\frac{1}{2\pi i}\sum_0^\infty{}_n\, a_n v^{n+1}\int_0^\infty e^{-\alpha}x^n\,dx\int_c e^z z^{-n-1}\,dz=\mathrm{F}(v)\,.$$

2. Mostreremo ora come l'equazione (2) si risolva, quando la funzione $f(v)=\dfrac{\mathrm{F}(v)}{v}$ sia sviluppabile in serie di Fourier, in un intervallo $(-l\,,\,l)$. Poniamo

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{P}(v)=\dfrac{1}{2}\left\{\mathrm{I}_0(2\sqrt{iv})+\mathrm{J}_0(2\sqrt{iv})\right\}, \\ \mathrm{Q}(v)=\dfrac{1}{2i}\left\{\mathrm{I}_0(2\sqrt{iv})-\mathrm{J}_0(2\sqrt{iv})\right\}, \end{cases} \qquad (i=\sqrt{-1}),$$

dove $\mathrm{J}_0(z)$ è la funzione di Bessel di prima specie e di ordine zero, mentre $\mathrm{I}_0(z)=\mathrm{J}_0(iz)$. Risulterà

$$\mathrm{P}(v)=\sum_0^\infty{}_n(-1)^n\frac{v^{2n}}{(2n)!\,(2n)!}\,,\quad \mathrm{Q}(v)=\sum_0^\infty{}_n(-1)^n\frac{v^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)!}\,;$$

e la soluzione della (2) è data dalla formula

$$(6)\qquad \varphi(v)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(u)\,du+\frac{1}{l}\sum_1^\infty{}_n\int_{-l}^{l}f(u)\times \\ \times\left\{\cos n\frac{\pi}{l}u\;\mathrm{P}\left(n\frac{\pi}{l}v\right)+\operatorname{sen} n\frac{\pi}{l}u\;\mathrm{Q}\left(n\frac{\pi}{l}v\right)\right\}du\,.$$

Infatti, cambiando in essa v in vx, e sostituendo, nel primo membro della (2), otteniamo appunto

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(u)\,du+\frac{1}{l}\sum_1^\infty{}_n\int_{-l}^{l}f(u)\cos n\frac{\pi}{l}(v-u)\,du=f(v)\,.$$

Ciò discende subito dalle seguenti uguaglianze:

$$(7)\qquad \int_0^\infty e^{-\alpha}\,\mathrm{P}(vx)\,dx=\cos v\quad,\quad\int_0^\infty e^{-\alpha}\,\mathrm{Q}(vx)dx=\operatorname{sen} v\,,$$

che si stabiliscono facilmente, ricorrendo agli sviluppi in serie delle funzioni $\mathrm{P}(v)$ e $\mathrm{Q}(v)$, e alla prima delle (4).

3. Supponiamo invece che $f(v)$ sia definita per ogni valore reale di v, e rappresentabile mediante l'integrale doppio di Fourier [2]. Abbiamo allora

$$(8)\qquad \varphi(v)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\alpha}^{+\infty}f(\lambda)\left\{\cos\alpha\lambda\;\mathrm{P}(\alpha v)+\operatorname{sen}\alpha\lambda\;\mathrm{Q}(\alpha v)\right\}d\lambda\,,$$

come agevolmente si verifica, procedendo in modo analogo al precedente.

[1] Cfr. Riemann-Weber, *Part. Diff.-gleich. der math. Physik*, 1er Bd., ediz. 1919, § 18.

Astronomia. — *Il sistema binario σ Coronae Borealis.* Nota di Giorgio Abetti, presentata dal Socio A. Di Legge.

Il sistema σ *Coronae Borealis* ($\Sigma 2032 \equiv \beta GC\ 7563$; $\alpha = 16^h\ 10^m.9$, $\delta = +34°\ 7'$, Eq. 1900) scoperto da W. Herschel nel 1781, con le componenti A e B di grandezza 5,8 e 6,7, presenta un lento moto orbitale, tanto che l'arco di orbita apparente (130°) descritto dal compagno B attorno ad A dall'epoca delle misure di W. Struve (1827) fino alla presente non basta ancora a determinare con certezza gli elementi. Burnham nel suo catalogo generale nota che saranno necessarie le misure ancora di un secolo per dare un periodo approssimato. Tuttavia un numero notevole di orbite sono state calcolate, che naturalmente presentano periodi molto diversi.

Il più recente sistema di elementi calcolato da Doberck [1]:

$$\begin{aligned} P &= 1679^a.2 \\ T &= 1828\ .71 \\ e &= 0\ .848 \\ a &= 9''.018 \\ \omega &= 276°.03 \\ i &= \pm\ 29°.05 \\ \Omega &= 177°.80 \end{aligned}$$

angoli di posizione crescenti,

rappresenta, con sufficiente esattezza, le osservazioni più recenti [2].

Il medio di misure da me eseguite nello scorso anno con l'equatoriale di Amici ad Arcetri, in tre sere [3], dà i seguenti residui:

1921,43 $p_o = 219°.5$, $\varrho_o = 5''.55$; $p_o - p_c = -0°.4$, $\varrho_o - \varrho_c = +0''.32$.

Le grandezze assolute e la parallasse delle componenti A e B dalle misure spettroscopiche di Monte Wilson [4] risultano:

$$\begin{aligned} \text{grandezza assoluta}\quad A &= 3.7 \\ \text{»}\qquad\qquad\quad B &= 4.2 \\ \pi_{AB} &= 0''.036\ , \end{aligned}$$

in buon accordo questa con le determinazioni trigonometriche.

(1) Astr. Nachr., Nr. 4051, a. 1905.
(2) Cfr. Aitken. Lick Publ., vol. XIII e Greenwich, *Cat. of Double Stars*, a. 1921.
(3) Pubblic. Osservatorio Arcetri, fasc. 39, pag. 14, a. 1922.
(4) Contributions Mt. Wilson, Nr. 199.

Sempre le misure di Monte Wilson assegnano le due componenti alla classe spettrale F9, mentre è da notarsi che Struve e Dembowski trovano una differenza di colore fra A e B, e precisamente:

Σ A subflava , B subcaerulea

Δ A giallo-bianca , B cinerea chiara.

La massa totale del sistema, in unità della massa solare, con gli elementi di Doberck e il valore della parallasse di Monte Wilson risulta:

$$M + M' = 5.57 \odot .$$

Il sistema AB è stato collegato da Σ con una componente D di $10^m.5$ e da OΣ con una componente C di $12^m.5$, e le misure sono state più volte ripetute fino all'epoca presente.

La determinazione delle masse relative di A e B è stata calcolata in base a questi collegamenti da Lewis (1) che ricava il valore approssimato $\frac{m'}{m} = 4$, e da Hadley (2) che trova $\frac{m'}{m} = 1.1$. Boss (3) dalle osservazioni meridiane ricava: $\frac{m'}{m} = 0.47$.

La notevole discordanza fra questi valori si spiega col fatto che essendo il moto orbitale molto lento, dall'epoca del passaggio al periastro, avvenuta nel 1828.7, cioè all'incirca all'epoca delle prime osservazioni, la curvatura del moto di B attorno ad A è troppo piccola perchè le masse relative possano venire determinate con sufficiente esattezza.

Esaminando come i valori trovati di $\frac{m'}{m}$ soddisfino alle più recenti osservazioni micrometriche, si trova che il valore di Boss è certamente troppo piccolo, e che è più probabile un valore medio fra quelli di Hadley e Lewis.

Con le misure di AC e AD che si trovano in βGC e con altre più recenti, di cui in calce alla tabella ho notato le fonti, ho formato i seguenti luoghi normali, e per le date corrispondenti ho calcolato con gli elementi di Doberck gli angoli di posizione e le distanze di AB.

(1) Memoirs of the Royal Astr. Soc., vol. LVI, pag. 447.
(2) Popular Astronomy, vol. 13, a. 1905.
(3) P. G. C. Appendix II, pag. 273.

t	Coppia AC , eq. 1850			Coppia AB , eq. 1850	
	p	ϱ	Osservatori	p_o	ϱ_o
	°	″		°	″
1851.73	234.1	21.19	$O\Sigma$	174.5	2.20
1857.12	230.8	19.98	$O\Sigma$	182.5	2.48
1877.95	223 3	15.89	Hl	201.4	3.49
1880.39	221 2	15.06	β	203.0	3.60
1890.33	213.0	12.55	β	208.3	4.04
1898.47	208.7	11.23	Hu	212.0	4 37
			Coppia AD , eq. 1850.		
1836.69	88.88	43.75	Σ	135 1	1.40
1862.60	88.20	51.01	Δ	188.6	2.77
1866.02	88.10	52.02	Δ	192.1	2.94
1874.51	88.15	54.62	Δ , Je	199.0	3.35
1884.50	87.70	56.70	β , Maw	205.3	3.79
1904.41	85.63	62.24	Do , Gr. 21	214.0	4.60
1909.06	85.50	63.71	β , Bies , Lau	216 0	4.78
1911.41	85.53	64.01	Do , Fox	216.8	4.87
1913.20	84.62	65.29	Gr. 21	217.4	4.93
1920.20	85.15	66.99	de Vos , Ab_2	219.6	5.18

Do = Doberck Astr. Nachr. 4480, 4529.
Gr 21 = *Catalogue of Double Stars*, Greenwich, a. 1921.
β = *Proper Motion Stars*, Carnegie Inst. of Washington Pubbl., n. 168.
Bies = Van Biesbroeck, Annales Observ. de Belgique, tome XIII, fasc. II.
Lau = Astr. Nachr. 4378.
Fox = Annals of the Dearborn Obs., vol. I.
de Vos = de Vos van Steenwijk. Monthly Notices, vol. 80, pag. 229.
Ab_2 = G. Abetti, Pubbl. Arcetri, fasc. 39, pag. 14, a. 1922.

Il valore di $k = \frac{m'}{m + m'}$ che meglio soddisfa ai sistemi di equazioni in α e δ, che si formano con questi luoghi normali, è 0.7 mentre il valore di Boss $k = 0.32$ lascia dei notevoli residui. Con $k = 0.7$ si ha $\frac{m'}{m} = 2.6$, che è appunto il medio fra i valori di Lewis e Hadley.

Fra i pochi valori di masse relative conosciuti con sufficiente esattezza, soltanto per il sistema *85 Pegasi* il compagno B, di cinque grandezze minore di A, pare accertato che abbia una massa 1,7 volte maggiore di

quella di A (1); per tutti gli altri 18 sistemi il rapporto delle masse $\frac{m'}{m}$ diminuisce in modo regolare e continuo coll'aumentare della differenza di grandezza fra le due componenti. Sarà dunque interessante stabilire con osservazioni future se il sistema σ *Coronae* segua nel rapporto delle masse la regola più comune o presenti un caso di eccezione come quello di *85 Pegasi*.

Fino all'epoca presente resta una notevole incertezza fra il valore $\frac{m'}{m} = 2.6$, che è quanto oggi possono dare i collegamenti micrometrici con C e D, e il valore trovato da Boss $\frac{m'}{m} = 0.5$ dedotto dalle osservazioni meridiane esistenti. Per il momento non si può far altro che assumere l'uguaglianza delle masse di A e B come indicherebbe la loro differenza di grandezza.

Con questa ipotesi si ha

$$M = 2{,}8 \odot \quad , \quad M' = 2.8 \odot$$

e il moto proprio del centro di gravità del sistema:

$$AB \quad \text{c. g.} \quad \mu_\alpha = -0''.352 \quad , \quad \mu_\delta = -0''.081$$
$$\mu = 0''.302 \quad \text{in} \quad 254°.5 .$$

La densità delle due componenti, calcolata in base alla loro classe spettrale F9, risulta:

$$\delta_A = 0.34 \odot \quad ; \quad \delta_B = 0.99 \odot .$$

La velocità del sistema nel piano normale alla visuale risulta di 40 chilometri per secondo; la velocità lungo la visuale del compagno B, determinata a Monte Wilson, è di —18 chilometri per secondo. Ammettendo che questa sia prossimamente anche la velocità del centro di gravità del sistema, si ottengono per questo la velocità nello spazio e le coordinate del suo apice seguenti:

$$v = 32 \text{ chm.} \quad ; \quad A = 170 \quad ; \quad D = -19° .$$

In accordo con le grandezze assolute di A e B, questo sistema fa parte della classe delle stelle *nane* con le caratteristiche fisiche che competono alla sua luminosità (2).

(1) Memorie degli Spettroscopisti, serie 2ª, vol. 8°, a. 1919.
(2) Cfr. Pubbl. Arcetri, fasc. 39, pag. 31, a. 1922.

Fisica. — *Gli spettri di assorbimento dei coloranti del trifenilmetano* (1). Nota del dott. Emilio Adinolfi, presentata dal Socio M. Cantone (2).

Fu da me rilevato in una Nota precedente (3) che le sostanze coloranti del trifenilmetano nei solventi: acqua, alcool etilico, etere, benzolo, glicerina, toluolo, xilolo presentano curve di assorbimento dello stesso tipo e con massimi che subiscono spostamenti crescenti col crescere della massa molecolare del solvente. Tale conclusione, che farebbe supporre una vera e propria addizione fra le molecole del solvente e del soluto, meritava una ulteriore conferma: è lo scopo della presente Nota.

I solventi adoperati in questa seconda serie di ricerche sono stati, oltre l'acqua, gli alcool metilico, etilico, isobutilico ed amilico; in essi le sostanze esaminate sono direttamente solubili; veniva perciò eliminato l'artificio cui si dovette ricorrere nelle esperienze precedenti e che consisteva nell'usare qualche goccia di un solvente estraneo per favorire la solubilità. L'analisi delle curve di assorbimento, eseguita col metodo della diffusione (4), ha potuto estendersi a una ventina di sali del trifenilmetano delle case Bayer e Kahlbaum. La tabella annessa raccoglie le misure in $\mu\mu$ relative ai centri delle bande che per ognuna delle sostanze si hanno nei diversi solventi.

I coloranti del gruppo delle rodamine sono in maggior parte fluorescenti e in misura variabile col solvente; fra essi la rodamina 6 g., la rosa di bengala, l'eosina, la flossina, la cianosina seguono la cennata regola dello spostamento dei centri; la rodamina B e l'uranina se ne allontanano. Il comportamento anomalo di queste due ultime sostanze potrebbe dipendere dal modo come si effettua la riemissione per fluorescenza, poichè non è improbabile che i centri di risonanza subiscano perturbazioni dipendenti dalla intensità e posizione delle bande di fluorescenza. L'uranina presenta una fluo-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia il 3 giugno 1922.

(3) Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli. serie 3ª, vol. XXVII, 1921.

(4) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIX, serie 5ª, 2° sem., fascicolo 1°, 1920.

Solventi		H_2O	$CH_3.OH$	$C_2H_5.OH$	$C_4H_9.OH$	$C_5H_{11}.OH$
Verde malachite	λ_1	618	622.6	627	632	635.6
	λ_2	577	577	581	—	592
Verde brillante	λ_1	629.8	631	634	634.5	635.6
	λ_2	579	—	—	—	—
Bleu vittoria	λ_1	592	595	596.2	602	605
	λ_2	539.5	549.3	550	557	559.7
Cianina	λ_1	586	594	595	603	605
	λ_2	550	—	552	557	563
Fuxina	λ_1	547.5	554	557.5	559	562
	λ_2	492	507	507	513	514
Azofuxina	λ_1	519	567	—		—
	λ_2	515	528	—	—	—
Rosanilina	λ_1	543.8	549.6	553	559	562
	λ_2	481	503	503	514	514
Pararosanilina	λ_1	546	550	552	557	562
	λ_2	493	502	507	508	—
Violetto metile	λ_1	591	594	599	599	599.5
	λ_2	540.5	551	553	555	—
Verde metile	λ_1	633	643	642	643	645.5
	λ_2	587	588.6	588	592	592
Violetto di genziana	λ_1	586	594	595	—	—
	λ_2	537	543	547	—	—
Rodamina 6 g.	λ_1	527	529.7	534	532	535
	λ_2	496	492	497	—	4 7
Rosa di Bengala	λ_1	549.5	558.6	560.3	563	567.3
	λ_2	513	519	521.3	525	525.5
Eosina	λ_1	512.7	527	528	533.4	540
	λ_2	483.2	491.3	493.2	498	501
Rodamina B	λ_1	558.3	551.6	552.5	549	557
	λ_2	523	513	513	511	519
Uranina	λ_1	493	493.5	506	492	494
	λ_2	461	460	464	459	461
Cianosina	λ_1	539.2	552.7	555.5	556	557
	λ_2	501.2	511	513.2	515	517.5
Flossina	λ_1	545.2	557	558	559	565
	λ_2	518.3	529.5	530	536	540
	λ_3	486.5	492	492.7	498	502
Eritrosina	λ_1	547	—	550	563	562
	λ_2	518.2	527	527.5	540	540
	λ_3	485	498	489	501	501

rescenza intensissima che cresce passando dall'acqua, all'alcool metilico, all'alcool etilico e poi diminuisce negli alcool isobutilico ed amilico: e nel passare dall'alcool etilico all'isobutilico si ha un forte spostamento dei massimi in senso opposto.

La velocità di diffusione nei solventi alcoolici è maggiore di quella che si ha con gli altri solventi: in alcuni casi, e specialmente con soluzioni in alcool metilico, essa assume valori così grandi da aversi nel breve intervallo di pochi minuti colorazioni della intera colonna liquida di una lunghezza media di sei centimetri. Pur non avendo eseguite misure sulla rapidità della diffusione si può asserire che dall'alcool metilico, all'etilico, all'isobutilico, all'amilico la velocità decresce. Si è avuta massima cura, nel far pervenire la soluzione al fondo del recipiente contenente il solvente puro, di regolare l'efflusso in modo da evitare il disturbo dovuto a movimenti vorticosi e si è sempre ottenuta nelle condizioni iniziali netta superficie di separazione fra soluzione e solvente.

Con alcune delle sostanze adoperate la diffusione è caratterizzata da due fasi distinte: la prima consiste in una rapida propagazione della colorazione con gradiente piccolissimo di concentrazione e l'esame spettroscopico rivela una sola delle bande caratteristiche che si estende con larghezza costante, il che fa supporre che per questa prima fase la diffusione è completa; permane intanto la superficie di separazione che si aveva nelle condizioni iniziali e si origina da essa una seconda diffusione più lenta che completa allo spettroscopio le curve caratteristiche del gruppo. Si ha l'impressione di essere in presenza di un fenomeno di doppia diffusione originata da due gruppi atomici diversi.

Il fenomeno è nettamente apprezzabile con il verde malachite, la cianina, il violetto di genziana, la flossina [1].

Pare già accertato del resto che in soluzione acquosa le sostanze coloranti del trifenilmetano vengano decomposte: e una probabile scissione è stata osservata dal Georgevics [2]. Una doppia diffusione con caratteri analoghi è stata notata dal Cantone e dal dott. Carrelli nelle soluzioni di iodo.

La permanenza nel tubo da saggio da sottoporsi all'esame spettroscopico di un imbutino capillare che aveva l'ufficio d'inviare al fondo del recipiente contenente il solvente puro, la soluzione alla concentrazione iniziale voluta, poteva far sorgere il dubbio che il fenomeno osservato fosse dipendente da moti di convezione termica favoriti dall'imbutino pieno di soluzione e atto quindi, per il diverso potere assorbente, a generare una

[1] Quest'ultima sostanza presenta tre massimi di assorbimento dei quali due diffondono nella prima fase e il terzo, cui corrisponde lunghezza d'onda maggiore, diffonde con maggiore lentezza.

[2] Panizzon, *Chimica delle sostanze coloranti*, vol. I, pag. 335.

corrente ascensionale di soluzione. Furono pertanto eseguite esperienze in tubi capillari piegati a U nei quali si aveva cura di portare per vie diverse solvente e soluzione nelle condizioni iniziali nettamente separati. In tali tubi la diffusione si effettua con grande lentezza, ma si riscontrano ugualmente le due diffusioni distinte.

Le fotografie della fig. 1 si riferiscono a una soluzione in alcool metilico di verde malachite che diffonde nello stesso solvente contenuto in un

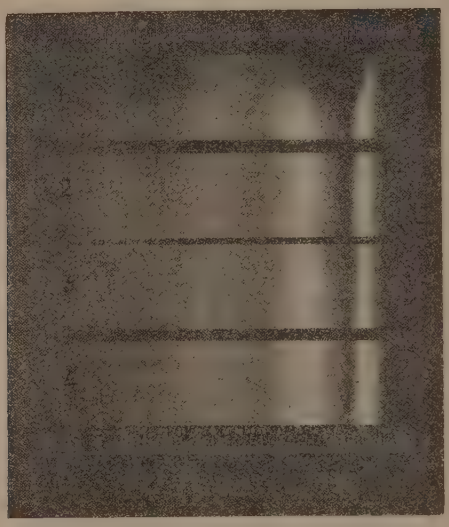


Fig. 1.

tubo capillare di un millimetro di diametro. La prima di esse è stata ottenuta portando in corrispondenza della fenditura dello spettroscopio la superficie di separazione che ancora si nota a diffusione inoltrata (venti ore dallo inizio): la seconda, la terza e la quarta si riferiscono a tratti della colonna liquida distanti 1, 3 e 6 cm. rispettivamente dalla superficie di separazione anzidetta.

Oltre al fenomeno della doppia diffusione altre ragioni concorrono a far ritenere che i vibratori che originano le curve di assorbimento nello spettro visibile dei coloranti del trifenilmetano sono due: di esse farò menzione in una successiva Nota. Per il momento si può conchiudere che anche *in soluzioni alcooliche, le sostanze esaminate, eccezione fatta per l'uranina e la rodamina* B, *presentano spettri di assorbimento i cui massimi subiscono spostamenti crescenti al crescere della massa molecolare del solvente.*

Fisica. — *Tenacità del nichel in rapporto al comportamento magnetico* [1]. Nota del dott. WASHINGTON DEL REGNO, presentata dal Socio M. CANTONE.

Le ricerche istituite sul nichel hanno messo in evidenza che alla temperatura critica si ha oltre alla perdita di magnetismo una variazione della resistenza elettrica, del potere termo-elettrico e del potere emissivo. Tale comportamento ha suggerita la presente ricerca che ha lo scopo di determinare le variazioni di tenacità di questo metallo col variare della temperatura in un intervallo abbastanza esteso da comprendere il punto di trasformazione magnetica.

Le esperienze sono state eseguite su fili di nichel ricotto fornito dalla casa Kahlbaum, di diametro non piccolo (mm. 0,5) per eliminare l'effetto dell'ossidazione, dimostratasi del resto piccolissima per le temperature raggiunte. Per il riscaldamento veniva usato un forno elettrico impiantato verticalmente a muro, alimentato da una batteria di accumulatori per avere, con la regolazione di opportune resistenze, la costanza della temperatura per tutto il tempo dell'esperienza, in media 15'. Le temperature erano determinate a mezzo di una pinza tipo Le Chatelier e di un galvanometro tipo Depretz-D'arsonval: la saldatura calda, completamente scoverta, veniva a corrispondere al centro del forno nella regione a temperatura pressochè uniforme occupata dal filo posto vicinissimo. Questo era assai corto, 50 mm., e ciò sia per poterlo ritenere tutto alla stessa temperatura sia per avere una minore disuniformità di sezione e quindi scarti piccoli nei valori della tenacità. Particolari cure si sono inoltre avute circa le modalità degli attacchi: ho impiegato anch'io il dispositivo a doppio filo che ha dato buoni risultati in precedenti analoghe esperienze eseguite dal Cantone [2] a temperatura ordinaria, opportunamente adattato alle dimensioni assai ridotte dello spazio nel quale si poteva operare (diametro del tubo interno del forno mm. 27) e liberato dalla guida alla rotella inferiore. Questa, perfettamente libera, portava il gambo al cui estremo veniva adattata la boccia destinata a ricevere il carico costituito da acqua la cui velocità di efflusso veniva regolata in modo da riuscire assai piccola e quasi costante: la piccolissima variazione di velocità, com'è risultato sperimentalmente, non aveva alcuna influenza sul valore da determinarsi.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Napoli.
[2] Rendiconti Accademia dei Lincei. fasc. X, 1° sem. 1922.

Esperienze preliminari ebbero lo scopo di assodare l'influenza delle modalità del riscaldamento sui valori della tenacità. Esse dimostrarono che collocando nel forno il filo sin da principio e mantenendovelo per tutto il tempo necessario a raggiungere la temperatura dell'esperienza, si avevano risultati assai poco differenti da quelli che si ottenevano introducendo invece il filo dopo di aver portato il forno alla temperatura voluta.

Temperature	100°	200°	300°
Primo modo di riscaldamento .	51.02	50.10	49.54
Secondo » » » .	50.91	50.19	49.24

Assai piccola risultava cioè l'influenza della diversa durata di riscaldamento del filo, durata che nel primo caso era non solo variabile con la temperatura da raggiungersi, ma sempre abbastanza lunga essendo obbligati, per avere la costanza della temperatura per tutto il tempo dell'esperienza di trazione, a riscaldare assai lentamente il forno con una corrente non superiore a quella necessaria a mantenere il regime voluto. Nel secondo caso invece l'equilibrio di temperatura si otteneva poco dopo l'introduzione del filo nel forno, come poteva rilevarsi da una spia tracciata sul gambo del sistema ed osservata con un catetometro. Nelle esperienze eseguite con questo secondo metodo il riscaldamento veniva però prolungato e solo dopo mezz'ora dall'introduzione del filo nel forno veniva iniziata l'esperienza. Con ciò, mentre si era sicuri dell'uniformità di temperatura, si aveva assicurata anche la costanza della temperatura durante l'esperienza di trazione, mentre nessuna influenza apprezzabile produceva detto riscaldamento sul valore della tenacità. Con queste modalità e dopo lunghe e penose prove fu possibile ottenere i risultati indicati nella seguente tabella:

VALORI DELLA TENACITÀ (KG. PER MM². DELLA SEZIONE INIZIALE).

15°	100°		200°		300°		400°	450°	500°
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(2)	(2)	(2)
52.32	51.52	50.89	50.08	50.30	49.21	49.11	48,35	42.37	35.37
52.78	50.77	50.84	49.89	50.30	49.30	49.5	48,77	42.17	35.86
52 32	50.77	50.93	50.37	50.30	49.89	49.29	48.43	41.98	35.86
52.17	—	50.84	49.89	50.15	49.79	49.06	48.68	—	35.95
—	—	51.03	50.28	49.90	—	—	48.52	—	35 86
52.4	51.02	50.91	50.10	50.19	49.54	49.24	48.56	—	—
±0.19	50.95 ± 0.15		50.15 ± 0.18		49.39 ± 0.25		48 55 ± 0.14	42.20 ± 0.15	35.78 ± 0 16

(1) Primo metodo di riscaldamento. (2) Secondo metodo di riscaldamento.

Da essi si rileva che la tenacità del nichel, assai alta a temperatura ordinaria, diminuisce col crescere della temperatura prima assai lentamente e poi da 400° in su con maggiore rapidità. Si ha difatti fino ai 400° una variazione media di tenacità di Kg. 0.01 per grado, mentre al di sopra dei 400° la variazione è di Kg. 0,087 per grado cioè 8,7 volte la precedente. Dalla fig. 1 si rilevano nettamente i due andamenti della curva che sono

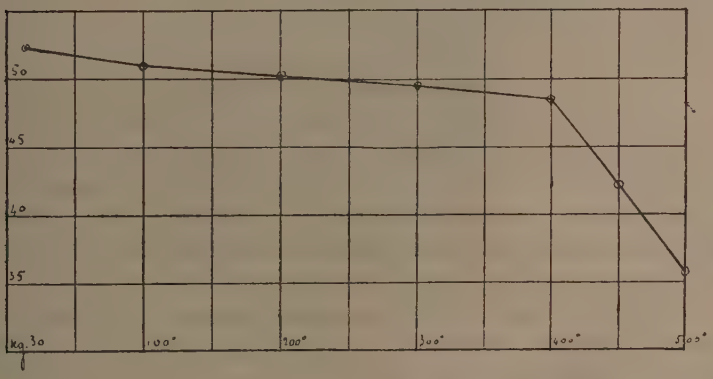


Fig. 1.

entrambi di quasi proporzionalità, eccettuato il primo tratto fino ai 100° in cui si ha una variazione doppia che nel tratto 100°-400°. Con questo di notevole che il passaggio da un andamento all'altro e che caratterizza i due stati del Nichel per rispetto al comportamento magnetico, avviene in corrispondenza alla temperatura di 400°, cioè ad una temperatura alquanto maggiore di quella comunemente indicata (340°-360°) per il punto di trasformazione magnetica. La stessa temperatura di 40 ° è stata ottenuta da Kei Iokibe e Sukeaki Sakai (1) per la variazione nell'andamento della curva della rigidità in funzione della temperatura, ed un ritardo nel cambiamento della legge di emissione (380°) fu ottenuto dalla Kahanowicz (2) con nichel della stessa provenienza di quello da me impiegato. Non è da escludere che la mancata coincidenza possa dipendere dal fatto che ai nostri giorni l'uso delle pinze termo-elettriche e dei forni elettrici permette un maggior rigore in questo genere di determinazioni.

(1) Philosophical magazine. Vol. 42. N. 249, settembre 1921, pag. 397.
(2) Rendiconti Accademia Lincei. Vol. XXX, fasc. 3-4, pag. 132.

Mineralogia. — *Sulla celestite del calcare madreporico della Provincia di Messina* (1). Nota II del dott. Francesco Ranfaldi, presentata dal Corrisp. F. Zambonini.

Celestina del vallone Marro.

Il vallone Marro si origina dai fianchi occidentali del monte Cona — che sorge a km. 1 1/2 circa al sud-sud-est di Rometta — e, contornando le falde del monte Marro, percorre da oriente ad occidente il territorio di questa cittadina, per sboccare ad est di Monforte-S. Giorgio, nella *fiumara* omonima, la quale segna i confini fra i territorî dei due su citati paesi.

In questo vallone, in mezzo alla svariata serie dei terreni appartenenti al terziario superiore, affiorano alcuni calcari, i quali racchiudono una fauna fossile rappresentata da modelli di Lamellibranchi e da colonie di polipai appartenenti alla tribù delle Astracee.

Su di un modello di detti polipai — che il perfetto stato di conservazione mi permise di classificare agevolmente come riferentesi ad *Heliastraea-Raulini* E. e H. (2) — ho rinvenuto, impiantati sulle impronte dei calici, alcuni piccoli cristalli bianchicci, prismatici di celestina.

Pertanto anche questo giacimento presenta caratteri di analogia tanto con quello di Tremonti, quanto con quello di Monte Viale, di cui ho già trattato avanti.

L'età dei calcari racchiudenti la fauna predetta — nei quali furono rinvenuti i cristalli sopra citati — a me pare non possa assumersi come esaurientemente definita, quantunque G. Seguenza (3), molti anni addietro, avesse riferito tali calcari al Tortoniano.

Infatti, al disopra dei conglomerati di ciottoli cristallini, che rappresentano un unico orizzonte geologico nella maggior parte della Sicilia — specialmente nella provincia di Messina — e che da tempo sono stati riferiti

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Messina.

(2) Specie già rinvenuta da G. Seguenza nella stessa regione (*Disquisizioni paleontologiche intorno ai corallari fossili delle rocce terziarie del distretto di Messina*, vol. II, loc. cit., Torino, 1864, pag. 107, tav. XIII, fig. 1, 1*a*, 1*b*.

(3) G. Seguenza, *Breviss. cenni int. a sez. terziar. d. prov. d. Messina*, loc. cit., pp. 16 e seg. dell'estratto.

al tortoniano (1), poggiano, sabbie, molasse, argille e calcari. Questi ultimi — che sono precisamente quelli che racchiudono modelli di bivalvi e polipai, affioranti fra l'altro al vallone Marro — credo non siano stati ancora esaurientemente studiati, sia perchè poveri di fossili caratteristici e ben conservati, sia perchè manifestandosi qua e là al disotto delle argille ed arenarie a gessi, come il residuo di forte azione denudatrice, non lasciano chiaramente scorgere la loro posizione stratigrafica; e quindi, per quanto i calcari suddetti si trovino sicuramente al disopra dei su riferiti conglomerati tortoniani, non credo possano ancora ritenersi come sufficientemente accertati per tortoniani. d. c. Alle anzidette condizioni che, nell'esame dei nostri calcari, rendono difficile tanto l'applicazione del concetto paleontologico, quanto di quello stratigrafico, e quindi laboriosa la determinazione e dubbia l'impostazione cronologica, se ne aggiungono però altre riguardanti la speciale *facies* fossilifera, la quale io credo tenda a rivelare questi calcari come omotipici a quelli sicuramente pontici di altre regioni.

Infatti il Mottura (2) rinvenne calcari racchiudenti polipai degli stessi generi di quelli riscontrati in contrada Marro, presso il feudo Landro, tra Vallelunga e S. Caterina. Ed il Baldacci (3) riferì in seguito tali calcari all'ultima zona del tortoniano, non per la fauna, ma per la loro posizione al disotto dei tripoli, sottostanti alla zona a solfi, che egli assumeva allora come sarmatiano, ma che oggi è ritenuto sicuramente pontico (4).

Il Cortese (5) trovò presso Monteleone un calcare racchiudente una fauna corallina di cui i generi, e persino varie specie, sono affatto simili a quelle che si rinvengono nel nostro calcare e fondandosi principalmente sul fatto che quei calcari si trovano collaterali al calcare siliceo della formazione gessoso-solfifera, li ascrisse al mio-pliocene, asserendo che essi rappresentano una forma di Messiniano.

Il prof. Giovanni Di Stefano (6) descrivendo i pochi lembi di calcare a modelli di grossi bivalvi che nella regione Salinà, fra Centuripe e Catenanuova in provincia di Catania, si osservano sulle argille con sabbia del tortoniano, interpreta l'accumulo di grandi Lucine — di cui quei calcari si

(1) G. Seguenza, loc. cit.; Cortese, Bollettino del R. Comit. Geol. d'Italia, 1882, anno XIII, pag. 333; Baldacci, *Descrizione geologica della Calabria.* Mem descr. d. carta geol. d'It., vol. IX, Roma, 1895, pag. 109.

(2) Mottura, *Sulla formazione terziaria della zona zolfifera della Sicilia* Mem. p. serv. a. descr. d. carta geol. d'It. pubbl. a cura d. R. Com. Geol. d. Regno, vol. I, Firenze, 1871, pag. 68.

(3) Baldacci, loc. cit., pag. 99 e pag. 108.

(4) De Lapparent, *Traité de Géologie*, quatrième édition, Paris, 1900, pp. 1547 e seg.

(5) Cortese, *Descriz. geol. d. Calabria*, loc. cit., vol. IX, Roma, 1895, pp. 152 e seg.

(6) Giov. Di Stefano, *Il Calcare con grandi Lucine dei dintorni di Centuripe in provincia di Catania.* Atti d. Acc. Gioenia d. Sc. Nat., serie IV, vol. XVI, Catania, 1903, pag. 11.

mostrano essenzialmente costituiti — come residui di una colonia di questi bivalvi della base del piano pontico; e ritiene altresì che forse tali calcari possono ricordare quelli a modelli di bivalvi del messinese, i quali, d'altra parte, dallo stesso A. sono ritenuti probabilmente omotipici, ai calcari di Licodia Eubea, dei quali almeno una parte — come lo stesso A. fa rilevare confutando l'opinione del barone Cafici (1), che su di essi ci diede un pregevole studio — dovrebbe ammettersi sia immediatamente posta alla base del piano pontico.

È inoltre opinione del Di Stefano (2) che la maggior parte de' banchi a modelli affioranti in numerosissime regioni d'Italia e riferiti dagli A.A. a varî orizzonti geologici, debbano ritenersi sincroni ai calcari di Catenanuova, e quindi pontici.

Da quanto ho esposto a me sembra poter conchiudere che al pontico — più che al tortoniano, come fin'ora si è ritenuto — forse con maggiore probabilità finirebbero col riferirsi i lembi calcarei del nostro giacimento, se sulla sua tettonica e sulla sua fauna fossile potessero raccogliersi tali dati e materiale da rendere possibile uno studio minuzioso ed esauriente. Ed alla soluzione di questo problema potrebbe giovare l'esame della regione che svolgesi fra i territorî di Rometta, Monforte-S. Giorgio, e S. Pier Niceto, giacchè in essi si hanno tutti i rappresentanti del terziario superiore Messinese, e nel vallone Marro è rappresentato il calcare a modelli e ad Heliastrea.

I cristalli di celestite del vallone Marro si presentano di colore generalmente bianco lattiginoso, translucidi e variamente torbidi, per modo che mentre taluni gruppi assumono dei toni bianchicci, altri tendono ad una lieve tinta giallastra. Tutti hanno lucentezza perlacea. Le loro dimensioni variano da un minimo di mm. 1 ad un massimo di mm. 6 — che è raggiunto solo da pochi — nella direzione dell'asse [100], con una grossezza che rare volte raggiunge od oltrepassa di poco il millimetro. Essi si presentano impiantati sul fossile per un estremo dell'asse [100], per cui si mostrano terminati ad un solo estremo di questo asse e sono variamente inclinati, e più o meno intimamente aggruppati, ora a mo' di ventaglio, ora con disposizione ipoparallela.

Però ne ho osservato qualcuno completamente isolato, il quale, pur aderendo al fossile per parte di alcune delle faccette terminali, si mostra adagiato per tutta la sua lunghezza sulle parti delicatamente rilevate di questo, su cui poggia ordinariamente una faccia del prisma {011}. Per tale disposizione, uno di questi cristalli mostra abbastanza nettamente visibili tutte le facce terminali di entrambe le estremità dell'asse [100] — caso, come è

(1) Id., loc. cit., pag. 11.
(2) Id., loc. cit., pag. 12.

ben noto, piuttosto raro per i cristalli della specie — e su di esso ho potuto eseguire agevolmente, e senza usare alcun artifizio, le misure di tutti gli angoli, poichè le incrostazioni di calcare che restano sul cristallo staccato non cuoprono che parzialmente le faccette di contatto.

Ho potuto, così, constatare che questo individuo (vedi fig. 6) presenta un notevole apparente aspetto emimorfo secondo l'asse [100], giacchè mentre in una delle estremità di questo asse si distinguono nettamente le facce delle {110}, {102}, {100}, nell'altra si presentano solo quelle del prisma {102}. Lo spigolo comune delle facce di questo prisma, però, si mostra addentellato, ed ai margini in cui queste facce iniziano la soluzione di continuità si presentano le due faccette di un prisma {6.0.11}, nuovo per la specie, il cui simbolo risulta determinato dai seguenti angoli:

$$(6.0.11):(102) = \begin{matrix}(\text{mis.}) & 2^\circ\,40' \\ (\text{calc.}) & 2^\circ\,37'\,47''\end{matrix} \quad \text{diff.} = +2'\,13''$$

$$(6.0.11):(001) = \begin{matrix}(\text{mis.}) & 41^\circ\,55'\,30'' \\ (\text{calc.}) & 41^\circ\,52'\,18''\end{matrix} \quad \text{diff.} = +3'\,12''$$

Per quanto avessi esaminata con molta cura questa estremità del cristallo, facendo anche uso di lenti a forte ingrandimento, non mi fu possibile scorgere nemmeno tracce delle faccette corrispondenti alle altre due forme {100} e {110}.

Il tipo morfologico non differisce da quello osservato nei cristalli di Tremonti, giacchè anche in questi del vallone Marro, non solo si nota il comune abito nettamente prismatico secondo {011} con sensibile allungamento dell'asse a, ma si rileva altresì quell'ingrossamento all'estremità libera di quest'asse, di cui avanti ho parlato Tutti gli individui, in genere, sono abbastanza regolari, poichè le facce omologhe delle forme dominanti — ordinariamente tutte presenti nelle parti libere dei cristalli — si mostrano quasi sempre sensibilmente equidimensionali.

Le figg. 4, 5 e 6 rappresentano i tipi più caratteristici delle diverse combinazioni osservate, e nel disegno, pur completando e regolarizzando i cristalli, ho cercato di riprodurne l'habitus nel miglior modo possibile.

Tutte le facce — specialmente negli individui più piccoli — sono alquanto pianeggianti, ma spesso, col crescere in dimensione, si mostrano alquanto corrose, scabre o striate, per cui al goniometro si presentano piuttosto lucenti, ma ordinariamente riflettono immagini di scarso splendore ed a contorni variamente sfumati. Non è raro, infine, il caso di immagini doppie, triple ed anche multiple, dovute a poliedria che frequentemente si presenta nelle facce striate.

Forme osservate:

{001} {100} {011} {110} {102} {6.0.11}*

delle quali — ch'io sappia — la {6.0.11}* è nuova per la specie.

Delle suddette forme sono costanti:

{011} e {102}

alquanto frequente:

{001}

rinvenute una sola volta:

{100} {110} {6.0.11}*

Combinazioni osservate:

1ª	—	—	{011}	—	{102}	—	molto frequente (fig. 4).
2ª	—	{001}	{011}	—	{102}	—	frequente (fig. 5).
3ª	{100}	—	{011}	{110}	{102}	{6.0.11}*	osserv. una sola volta (fig. 6).

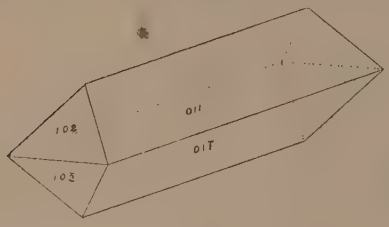


Fig. 4.

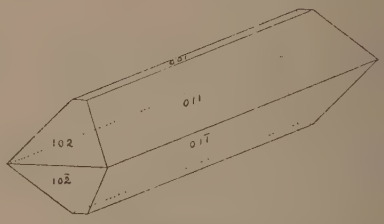


Fig. 5.

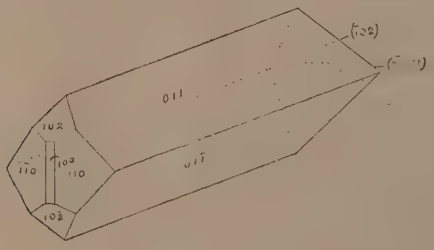


Fig. 2

Le facce presentano i soliti caratteri, e non si prestano, in genere, a misure precise. Ho confrontato i valori da me ottenuti con quelli calcolati mediante il rapporto parametrico:

$$a:b:c = 0{,}78035:1:1{,}28236$$

determinato dall'Auerbach per la celestina di Sicilia.

ANGOLI	Numero osservazioni	Misure		Calcolo
		Limiti	Medie	
(001):(011)	4	51°41′ — 52°16′	52° 1′½	52° 3′ 9″
(102):(10$\bar{2}$)	3	101.10.40 — 101.12.40	101.11	101.10 59
(102):(001)	3	39.23 — 39.43	39.25½	39.24.30
(102):(011)	15	61.26 — 61.42	61.35	61.37.57
(102):(110)	2	59.55 — 60. 2	59.58½	59.58. 3
(011):(110)	2	60.57 — 61.12	61. 4½	60.58.44

Biologia. — *Suscettibilità differenziale, gradiente assiale e rapporti tra correlazioni e differenziazioni.* Nota del dott. Giulio Cotronei [1], presentata dal Socio Battista Grassi.

La presente Nota si propone di precisare la relazione tra le mie ricerche sui rapporti tra correlazioni e differenziazioni nello sviluppo degli Anfibi e le idee e le ricerche del Child e della sua scuola.

Negli ultimi anni un biologo americano di grande valore, il Child, ha sviluppato una interessante dottrina che poggia sulla concezione fisiologica della forma. L'organismo vivente viene concepito come un asse di attività fisiologica diseguale nei suoi varî punti: si verifica cioè un gradiente assiale, svolgendosi i processi biologici più intensamente alla parte apicale (cefalica) che non alla parte basale. Negli animali a simmetria radiale non esiste se non un gradiente apico-basale. Ma nelle forme bilaterali, oltre quest'asse polare, vi è anche un gradiente bilaterale. V'è però una differenza tra vertebrati e invertebrati: « *in most bilateral invertebrates the high region of these bilateral gradients is apparently represented by the median ventral region and in the vertebrates by the median dorsal region* ».

Child, in uno dei suoi ultimi lavori di natura sintetica [2], ha proposto di sostituire il termine *gradiente fisiologico* all'altro *gradiente metabolico* giacchè il protoplasma è un sistema nel quale le reazioni chimiche del metabolismo sono così intimamente associate con altri fattori (come la dispersione colloidale, l'attività enzimatica, la permeabilità, il contenuto in acqua e in elettroliti) che « ... *to attempt to distinguish one particular factor rather than another as primary is at present impossible* ».

In una serie di ricerche su gli Anfibi mi sono occupato dello studio, sia delle correlazioni meccaniche, sia delle umorali. E tra i metodi d'indagine da me adoperati, si è fatto grande uso di quello che gli autori americani chiamano metodo della *suscettibilità differenziale*. Fin dal 1915 ho potuto riscontrare che il processo malformativo comincia (come grado) all'apice cefalico e procede in direzione caudale. È risultato, inoltre, da tutta una serie

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto d'Anatomia e Fisiologia comparata della R. Università di Roma.

[2] Child C. M., *Some consideration concerning the nature and origin of physiological gradients.* Biological Bulletin, vol. 39. 1920.

di mie ricerche, che parti disposte più lateralmente (occhi, organi olfattori, papille laterali del vestibolo boccale) tendono a portarsi sulla linea mediana dove si trovano, pertanto, zone inibite e che il processo d'inibizione in questi organi è più intenso nella parte ventrale che non nella dorsale.

Un fatto che, a mio credere, è di grande importanza, sono riuscito a mettere in rilievo: l'apice della corda dorsale è un punto d'arresto del processo malformativo in quelle larve che hanno potuto proseguire nello sviluppo fino (ad esempio) al consumo vitellino; distinguendosi sperimentalmente due parti ben distinte nella morfogenesi degli anfibi (rana, rospo, tritone) e cioè la parte cordale del corpo e la parte precordale (1).

Rivedendo i miei risultati sulla scorta delle idee del Child, si può ritenere che i processi metabolici sono più intensi alla parte precordale che pertanto è più influenzabile. Bisogna però subito aggiungere che io ho considerato le malformazioni della parte cefalica (precordale) come prodotte da un'azione *d'insieme* del cervello precordale. Le mie ricerche si sono, essenzialmente, ispirate a concetti meccanici, pur riconoscendo che le forze agenti sono esse stesse prodotte da attività biologiche, di natura molto più complesse; ma io ho preferito, per raggiungere dei risultati concreti, di non tentare di risalire troppo alle proprietà generali della sostanza vivente, ma di osservare i fatti nella loro seriazione e dedurne le relazioni causali immediate.

Molti fatti da me messi in evidenza fanno risaltare l'enorme importanza che ha la conquista dello spazio *in un determinato momento* per lo sviluppo di determinati organi Si potrebbe subito osservare che questa è un'osservazione banale. Perchè si sviluppino determinati organi è intuitivo che ci debba essere lo spazio necessario! In verità, se si fosse trattato di così poco, io non sarei stato alcuni anni ad occuparmi di simili inezie! Ma l'importanza sta nel mettere in rilievo le condizioni con cui si conquista il *nuovo* spazio embrionale e nello stabilire e precisare i rapporti tra determinate condizioni spaziali e i processi differenziativi.

Nello studio delle mie «*larve a litio*» è risultato che tende a scomparire la cavità ventricolare nella parte precordale dell'encefalo. Ne consegue un ammassamento cellulare (dissociazione dei processi morfogenetici elementari del Ruffini) e pertanto si ottiene un minore *sviluppo spaziale*. La prima conseguenza morfologica del fatto ora esposto, si ha nel cervello stesso: l'accumulo dei neu-

(1) In tutte le mie ricerche, finora pubblicate, che trattano delle larve a litio degli Anfibi, non ho nulla riferito sul comportamento del blastoporo. Si sa già, e anche per ricerche non più recentissime, che la regione del blastoporo è intensamente influenzabile. Una conseguenza di tale fatto, che si può riscontrare nello sviluppo ulteriore, è l'imperforazione anale. Tutto mi lascia pensare che la mancata invaginazione del tappo vitellino, che si può ottenere sotto l'influenza di determinati agenti, sia una conseguenza della dissociazione dei processi morfogenetici elementari di Ruffini, così come ho riferito in altri miei lavori.

roblasti finisce con l'ostacolare determinate differenziazioni; infatti, determinati centri proliferativi, che si trovano nelle parti laterali, sono costretti con la paralisi di alcune energie di sviluppo (movimento, secrezione) a subire più passivamente la forza di gravità e si vengono a trovare, pertanto, ventralmente, sulla linea mediana; è così ostacolato lo sviluppo successivo delle parti mediane. Quei fatti si osservano con grande evidenza nella regione oculare: ne consegue la ciclopia e la inibizione del nervo ottico. Determinate parti del territorio oculare possono rimanere, così, persistentemente incorporate nel cervello. L'inibizione del nervo ottico e quella del nervo olfattorio mettono poi in rilievo l'ostacolo che incontra la produzione delle fibre nervose nella parte malformata.

Nello sviluppare le mie indagini sono stato poi indotto a riconoscere che il movimento cellulare e la secrezione del liquido encefalico (ventricolare) servano in un dato momento ad occupare il maggior spazio possibile distendendo la lamina neurale precordale (Ruffini e Marchetti). L'accumulo dei neuroblasti è dovuto appunto alla paralisi delle funzioni di movimento e di secrezione; e il grado di tale paralisi [1] e quindi il maggiore o minore spazio occupato dal cervello precordale si riflette sul grado minore o maggiore del processo inibitorio in quegli organi cefalici che sono in rapporto con il cervello precordale.

***

I fatti e le considerazioni ora esposte tendono a fare risaltare l'importanza della formazione delle cavità ripiene di un liquido per la morfogenesi. È in tal modo che l'organismo può conquistare più rapidamente e più economicamente lo spazio e può dirigere lo sviluppo di quelle parti che vengono così sostenute (direttamente o indirettamente). Vengono così viste sotto una nuova luce le ricerche di Herbst sull'influenza dei tigmotropismi nello sviluppo e si mette in risalto il peculiare stimolo di *tensione* esercitato dal neurasse precordale sulla morfogenesi delle parti circostanti.

***

Quanto precede è stato da me verificato nello sviluppo ulteriore [2] degli Anfibi; ma fatti già messi in evidenza da altri autori, mi indurrebbero ad estendere le mie considerazioni ai processi embrionali che si svolgono in fasi più precoci dello sviluppo. La cavità e il liquido blastulare, la cavità

[1] Anche quel grado di variabilità che si riscontra nell'esaminare le malformazioni cefaliche nelle loro correlazioni è, secondo me, dovuto a quella variabilità di condizioni spaziali (in relazione a una variabilità nella dissociazione dei processi morfogenetici elementari del Ruffini) che si può avere nello sviluppo dei varî individui.

[2] Vedo annunziato su questo argomento, da me trattato da molti anni, un lavoro del Bellamy, della scuola di Child.

e il liquido gastrulare ecc., spiegano successivamente un'enorme influenza morfogenetica. Infatti in quegli esperimenti, che ostacolano lo sviluppo mercè influenze paralizzanti, si è appunto ottenuta l'obliterazione di queste cavità.

Per quanto io non abbia fatto ricerche sullo sviluppo degli invertebrati, sono indotto a pensare che, pur tenuto conto della differente morfogenesi e della possibilità di differenti parti direttive, fatti della stessa natura vi si possano riscontrare.

* * *

In conclusione le mie ricerche, che non contraddicono alle idee generali del Child, hanno fatto risaltare, mercè l'analisi sperimentale, il modo con cui si esplicano i processi embrionali per giungere, in un determinato momento, alla più rapida conquista dello spazio necessario allo sviluppo di determinati organi: in tal modo le mie ricerche hanno contribuito a mettere in luce le attività più concrete che presiedono allo svolgersi della forma.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente Volterra dà il triste annuncio della morte, avvenuta il 28 maggio 1922, del Socio nazionale senatore prof. Giovanni Capellini del quale ricorda i grandi meriti scientifici e la mirabile attività, anche negli ultimi anni della sua tarda età, nel campo degli studî geologici.

Al Presidente si unisce il Socio Canavari che legge i seguenti cenni necrologici dell'estinto:

« I Colleghi De Stefani e Parona hanno voluto che io, associandomi a quanto ha detto il nostro Presidente, esprimessi anche a nome loro il nostro profondo cordoglio per la perdita che l'Accademia e la Geologia hanno fatto con la scomparsa di Giovanni Capellini.

« Altri certamente commemorerà l'eminente scienziato con autorità infinitamente più grande della mia. Il solo titolo per cui ho preso la parola deriva dal fatto di essere uno degli ultimi, per data, di quei numerosi discepoli che uscirono dalla Scuola geologica pisana, fondata da Paolo Savi e da Giuseppe Meneghini, mentre Giovanni Capellini ne fu uno dei primi in ordine cronologico e primo tra tutti per alti meriti scientifici.

« Giovanni Capellini si addottorò a Pisa in scienze naturali nel 1858.

« Sin dall'inizio de' suoi studî geologici ebbe un solo pensiero: quello di dimostrare all'estero che la tradizione geologica tramandata a noi per opera di Leonardo da Vinci — sommo tra i sommi — era pur sempre viva e feconda e doveva anche in Italia affermarsi, appena risorta, come s'era affermata in Germania, in Inghilterra, in Francia, mercè Lyell, Werner, Cuvier, tre nomi, tre diversi indirizzi nel campo vasto delle discipline geologiche.

« Mentre Giuseppe Meneghini con l'autorità del nome, dotto in tutti i rami delle scienze naturali e quindi biologiche, riuniva a noi nella spiritualità della scienza pura, austriaci e tedeschi, quali von Hauer, Suess, Leonhardt, Zittel, ed inglesi, quali Lyell e Davidson, Giovanni Capellini stringeva più saldi e più ampî legami con francesi, con russi, con americani soprattutto, quali Gaudry, Karpinski, James Hall, Walcott, e cercava ovunque con le pubblicazioni scientifiche, riguardanti specialmente vertebrati fossili, con le corrispondenze epistolari, con i viaggi numerosi in Europa e fuori di Europa e con il promuovere e il presiedere congressi di scienze preistoriche e geologiche, di imporre all'estero il rispetto e la dovuta considerazione per la nostra produzione scientifica.

« Fu spesso rimproverato a Giovanni Capellini dai Colleghi che non lo conoscevano intimamente, il suo continuo e apparentemente esagerato desiderio di voler conseguire sempre nuovi onori e nuove onorificenze.

« Ma questa singolarità del compianto Collega era come la face virgiliana, che sempre, senza un istante di riposo, doveva accompagnarlo per tutta la sua luminosa carriera, quasi come incitamento di continuo e proficuo lavoro scientifico. Così che ogni nuova onorificenza da lui conseguita, mentre era il documento di un lavoro compiuto, rappresentava pure nel suo pensiero, un omaggio dovuto alla scienza italiana. E così egli fu, per oltre mezzo secolo, l'uomo più rappresentativo della Geologia che abbia avuto l'Italia.

« A Bologna intanto, nell'*alma mater studiorum*, dove andò come professore di Geologia fin dall'anno 1860, chiamato là da Terenzio Mamiani, appena ventisettenne, fondava il Museo geologico che deve annoverarsi tra i primi d'Italia. Ma se anche qui egli desiderava incidere — come incise — l'opera sua, che i posteri in ogni modo unanimamente gli avrebbero riconosciuta, egli cercò con ogni cura e con grande amore di riunire le più antiche raccolte dell'Aldrovandi soprattutto, come in un piccolo tempio, fin dal 1881, per testimoniare l'omaggio che i presenti devono a chi ci precorse.

« Orme indelebili ha lasciato Giovanni Capellini pur anco nel Museo pisano, dove una grande sala, quella dei Vertebrati, fu intitolata al suo nome e dove sono le sue prime raccolte fatte nei dintorni di Spezia. Con queste prime raccolte, ch'egli poi magistralmente descrisse, s'iniziò la sua importante opera scientifica.

« Ogni uomo lascia l'impronta di sè stesso negli scritti e nelle opere, come Fedro, il Liberto di Augusto, diceva scrivendo al suo amico Particulone 20 secoli prima che Buffon concretasse questo stesso pensiero nella classica frase « lo stile è l'uomo ».

« Giovanni Capellini mantenne pur sempre giovanile la sua tempra e la sua mente talchè, vicino a 90 anni, operava e pensava come un giovine.

« Tale fu, Giovanni Capellini, il Maestro che, come dicevo, a nome anche dei Colleghi De Stefani e Parona, con animo commosso e riverente, ho brevemente commemorato ».

Altra commemorazione legge il Socio MATTIROLO del compianto accademico prof. ANTONINO BORZÌ, di cui mette in luce la bella figura di scienziato e di artista. Questa commemorazione verrà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Il PRESIDENTE aggiunge che di un altro lutto dell'Accademia deve dar notizia: quello della morte del Socio straniero BERNARDO HASSELBERG professore di Fisica all'Accademia di Stoccolma, mancato ai vivi il 23 maggio 1922.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario CASTELNUOVO, presenta le pubblicazioni giunte in dono segnalando una Memoria a stampa del prof. BERLESE: *Un apparecchio per disegnare al microscopio;* un volume dell'ing. CASTELLI: *La coltivazione delle miniere di lignite;* e un altro volume di J. MASCART intitolato: *Impressions et observations dans un voyage à Tenerife.*

Il Socio LEVI-CIVITA, per incarico dell'autore, prof. UMBERTO CISOTTI, del R. Istituto Tecnico Superiore di Milano, presenta in omaggio i primi due volumi di un'opera intitolata *Idromeccanica piana*, e ne dà la seguente notizia:

Si tratta di un'ampia monografia dell'argomento designato dal titolo, la quale raccoglie con criterio sistematico, sotto tre categorie generali, numerosi e importanti problemi, alcuni classici o già da tempo risoluti (con artifici più che con metodi svariati), altri meglio discussi o risoluti per la prima volta in questi ultimi anni, attraverso fervida partecipazione di studiosi di ogni nazione, non ultimi certo gli italiani.

In tutte queste ricerche è dominante il sussidio desunto dalla teoria delle funzioni di variabile complessa.

Tuttavia, per la nitida impostazione dei problemi delle prime due categorie (regione del moto limitata esclusivamente da pareti rigide, oppure da soli peli liberi), bastano i principî classici e un artificio di rappresentazione conforme (Helmholtz-Kirchhoff-Stokes); per i problemi della terza catagoria, che hanno eguale, se non maggiore, importanza pratica (in cui inter-

vengono ad un tempo pareti rigide e peli liberi), si richiedono mezzi analitici alquanto più affinati, introdotti recentemente a proposito delle scìe.

Come è noto, il Cisotti ha apportato un contributo personale cospicuo alla risoluzione matematica e alla illustrazione meccanica di questioni appartenenti a tutti e tre i tipi suaccennati. Tanto più interessante ed utile appare perciò il lavoro di sintesi che egli ci offre, e di cui promette il prossimo compimento in un terzo volume dedicato al moto ondoso.

Il Socio De Marchi fa omaggio di una sua pubblicazione avente per titolo: *Variazioni del livello dell'Adriatico in corrispondenza colle espansioni glaciali.*

G. C.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

3 giugno 1922.

Baez R. — Nuevas orientaciones cientificas. Caracas, 1922. 8°, pp. 1-56.

Belluzzi G. — Commemorazione in memoria di Giuseppe Colombo. Milano, 1922. 8°, pp. 1-15.

Berlese A. — Un apparecchio per disegnare al microscopio (Estr. dal « Redia », vol. XV). Firenze, 1922. 8°, pp. 1-8.

Castelli G. — La coltivazione delle miniere di lignite. Bologna, 1922. 8°, pp. 1-477.

Cirini E. — Il principio generale di meccanica. Roma. 1922. 8°, pp. 1-37.

Cisotti U. — Idromeccanica piana. Parte I, II. Milano, 1921-22, 8°, pp. 1-373.

De Marchi L. — Variazioni del livello dell'Adriatico in corrispondenza colle espansioni glaciali (Estr. dagli « Atti della Accademia scientifica Veneto-Trentino-Istriana », vol XII-XIII). Padova, 1922. 8°, pp. 1-15.

De Toni G. B. — Frammenti Vinciani. X. Contributo alla conoscenza di fogli mancanti nei manoscritti A ed F di Leonardo da Vinci (Estr. dagli « Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti », tomo LXXXI, pp. 35-44). Venezia, 1921. 8°.

De Toni G. B. — Spigolature Aldrovandiane. XIX. Il botanico padovano Giacomo Antonio Cortuso nelle sue relazioni con Ulisse Aldrovandi e con altri naturalisti (Estr. da « Contributo del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti alla celebrazione del VII centenario della Università di Padova », pp. 217-249). Venezia, 1922. 8°.

Fanfani E. — La riforma del calendario. Montepulciano, 1922. 8°, pp. 1-13.

Feruglio G. — Risultati di esperienze con galleggianti per lo studio delle correnti del mare Adriatico negli anni 1910-14. Venezia, 1920. 8°, pp I-XV, 1-129.

Ivaldi G. — La legge del calore secondo il metodo sperimentale e la sua incompatibilità col secondo principio della termodinamica. Milano, 1922. 8°, pp. 1-76.

Longo B. — Le piante più notevoli del R. Orto botanico di Pisa. Pisa, 1922. 4°, pp. 1-28.

Mascart J. — Impressions et observations dans un voyage a Tenerife. Paris, s. d. 8°, pp. 1-366.

Pession G. — Sviluppo del servizio radiotelegrafico pubblico in Italia dopo la guerra (Estr. dal giornale « L'Elettrotecnica », n. 5). Varese, 1922. 4°, pp. 1-10.

Peyronel P. — Nuovi casi di rapporti micorizici tra basidiomiceti e fanerogame arboree (Estr. dal « Bollettino della Società Botanica Italiana »). Borgo S. Lorenzo, 1922. 8°, pp 1-10.

Poladas G. — Sviluppo del servizio radiotelegrafico pubblico in Italia dopo la guerra (Estr. dal giornale « L'Elettrotecnica », n. 5). Varese, 1922. 4°, pp. 1-10.

See T. J. J. — New Theory of the Aether (Repr. from « Astronomische Nachrichten », n 5130, pp 282-358, n. 5140, pp. 50-1:8). Kiel, 1922. 4°.

Woltyer J. — On the perturbations in the motion of Hyperion proportional to the first power of Titan's eccentricity (Repr. from « Proceedings », vol. XXI, pp. 1166-1175). Amsterdam, s. d. 8°.

Woltyer J. — The longitude of Hyperion's pericentre and the mass of Titan (Repr. from « Proceedings », vol. XXI, pp. 881-892). Amsterdam, s. d. 8°.